

Løsninger, øving 1 for FY2450 Astrofysikk, til 15/1 2004

Oppgave 1

Bruk Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_S + M_J)} ,$$

der

$$P = 365,2564 \text{ d\o{g}n} = 365,2564 \text{ d\o{g}n} \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ d\o{g}n}} = 31\,558\,153 \text{ s}$$

er omløpsperioden (ett siderisk år), $a = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$ er store halvakse i jordbanen (a er middelveidien av største og minste avstand mellom Jorda og Sola, pr. definisjon er det en astronomisk enhet), M_S er solmassen og M_J er jordmassen. Vi neglisjerer M_J i sammenligning med M_S , det er en god tilnærming siden forholdet M_S/M_J er 330 000. Vi regner altså at

$$M_S = M_S + M_J = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} ,$$

idet $G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (G er Newtons gravitasjonskonstant).

Kommentar: med de oppgitte data bør svaret angis med tre desimaler. Nøyaktigheten i svaret begrenses av den relative usikkerheten på 10^{-3} i den oppgitte verdien for a . Siden M_S er proporsjonal med a^3 , får M_S en relativ usikkerhet på anslagsvis $3 \cdot 10^{-3}$.

Oppgave 2

Vi bruker stadig Keplers 3. lov,

$$M_J + M_M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} ,$$

men nå er omløpsperioden P en siderisk måned,

$$P = 27,322 \text{ d\o{g}n} = 27,322 \text{ d\o{g}n} \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ d\o{g}n}} = 2\,360\,621 \text{ s} ,$$

mens a er store halvakse i månebanen (middelveidien av største og minste avstand mellom Jorda og Månen), $a = 384\,400 \text{ km}$. Den største massen M_J er jordmassen, mens M_M er månemassen. Vi neglisjerer igjen M_M i sammenligning med M_J , det er ikke lenger en fullt så god tilnærming, siden forholdet M_J/M_M er mindre enn 100. Vi regner altså at

$$M_J = M_J + M_M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 6,031 \cdot 10^{24} \text{ kg} .$$

Den fasiten dette bør sammenlignes med, er tabellverdiene

$$M_J + M_M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} + 7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 6,047 \cdot 10^{24} \text{ kg} .$$

Vi får altså et svar som er 3 promille for lite. Forklaringen kan være at vi ikke har regnet med gravitasjonskraften fra Sola på både Jorda og Månen.

Oppgave 3

Gå ned til Trondheimsfjorden og mål forskjellen på havnivået ved flo og fjære. Denne forskjellen er proporsjonal med massen til Månen. Vi kan i hvert fall gjøre et grovt overslag over sammenhengen.

La d være avstanden mellom Jorda og Månen (mer presist mellom sentrum av Jorda og sentrum av Månen), $d = 384\,400$ km. Husk at gravitasjonskraften mellom Jorda og Månen er den samme som om massen til hver av dem var samlet i sentrum. La videre R_J være jordradien, $R_J = 6380$ km.

Hele Jorda faller inn mot Månen med en akselerasjon som er

$$a_J = \frac{GM_M}{d^2} = 3,319 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2.$$

En liten stein med masse m må påvirkes av en kraft $F_0 = ma_J = GM_M m/d^2$ for å få denne akselerasjonen. Men hvis denne steinen f.eks. ligger på jordoverflaten på den siden som vender mot Månen, er tyngdekraften fra månen litt større, nemlig

$$F = \frac{GM_M m}{(d - R_J)^2} = \frac{GM_M m}{d^2} \frac{d^2}{(d - R_J)^2} = ma_J \frac{1}{\left(1 - \frac{R_J}{d}\right)^2} = ma_J \left(1 + \frac{2R_J}{d} + \dots\right).$$

Differensen

$$\Delta F = F - F_0 \approx \frac{2GM_M m R_J}{d^3} = \frac{2ma_J R_J}{d} = 0,033 \cdot ma_J$$

er tidevannskraften fra månen på denne steinen. Legg merke til at den er omvendt proporsjonal med avstanden i tredje potens, det skyldes at den er proporsjonal med *variasjonen* til tyngdefeltet fra Månen. Hvis $m = 1$ kg, er $\Delta F = 1,10 \cdot 10^{-6}$ N.

Tidevannskraften fra Månen på jordoverflaten gir altså en relativ korreksjon på 10^{-7} til tyngdens akselerasjon $g = 10 \text{ m/s}^2$. De stedene på jordoverflaten der tidevannskraften ikke er vertikal, kan den dermed forandre retningen av en loddlinje og helningen til en vannflate (vinkelrett på loddlinjen) med en vinkel på maksimalt 10^{-7} radianer. Over 10 000 km, som er 1/4 av omkretsen av Jorda, vil en helning av havoverflaten på 10^{-7} radianer gi en nivåforskjell på 1 meter. I følge dette grove overslaget skal altså forskjellen mellom flo og fjære være av størrelsesorden 1 meter. Hvis Månen hadde ti ganger større eller mindre masse, skulle flo og fjære være ti ganger større eller mindre.

Et stort mer nøyaktig estimat av massen til Månen skal en streve hardt for å oppnå med denne metoden. Det er ikke så vanskelig å regne mer nøyaktig med den idealiserte modellen vi bruker her. Men virkeligheten er mye mer komplisert, og flo og fjære varierer enormt fra sted til sted på Jorda, avhengig av lokale forhold. Det er f.eks. rimelig å tro at flo og fjære er mindre inne i Trondheimsfjorden enn ute på det åpne havet.

Oppgave 4

Kraften mellom Jorda og Sola:

$$F_{JS} = \frac{GM_J M_S}{r_{JS}^2} = \frac{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(1,496 \cdot 10^8 \text{ km})^2} = 3,543 \cdot 10^{22} \text{ N} .$$

Kraften mellom Månen og Sola:

$$F_{MS} = \frac{GM_M M_S}{r_{MS}^2} = \frac{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(1,496 \cdot 10^8 \text{ km})^2} = 4,358 \cdot 10^{20} \text{ N} .$$

Kraften mellom Jorda og Månen:

$$F_{JM} = \frac{GM_J M_M}{r_{JM}^2} = \frac{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7,349 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3,844 \cdot 10^5 \text{ km})^2} = 1,983 \cdot 10^{20} \text{ N} .$$

Kraften fra Sola på Månen er mer enn dobbelt så stor som kraften fra Jorda på Månen. Månen går rundt Sola, mer enn den går rundt Jorda!

Så hvorfor mister vi ikke Månen vår? Jo, fordi Jorda og Månen faller sammen innover mot Sola. Den kraften fra Sola som prøver å rive Månen vekk fra oss, er igjen en slags tidevannskraft. Når f.eks. Månen befinner seg mellom Jorda og Sola, er den tidevannskraften som sliter i Månen for å fjerne den fra oss, lik

$$\begin{aligned} \Delta F_{MS} &= \frac{GM_S M_M}{(r_{JS} - r_{JM})^2} - \frac{GM_S M_M}{r_{JS}^2} = \frac{GM_S M_M}{r_{JS}^2} \left(\frac{r_{JS}^2}{(r_{JS} - r_{JM})^2} - 1 \right) \\ &= F_{MS} \left(\frac{2r_{JM}}{r_{JS}} + \dots \right) = 5,14 \cdot 10^{-3} F_{MS} = 2,24 \cdot 10^{18} \text{ N} . \end{aligned}$$

Ikke stort mer enn en prosent av den kraften som Jorda holder fast på Månen med.

Merk: den akselerasjonen som Jorda og Månen tilsammen faller inn mot Sola med, er tyngdens akselerasjon fra Sola i det punktet som er massemiddelpunktet for Jorda og Månen tilsammen. Men dette massemiddelpunktet er ikke så langt fra sentrum av Jorda, fordi Jorda har så mye større masse enn Månen.

Til slutt en forklaring på hvorfor vi regner ut for liten samlet masse til Jorda og Månen i oppgave 2. Når Månen befinner seg mellom Jorda og Sola, er virkningen av tyngdekraften fra Sola den at tiltrekningen mellom Jorda og Månen reduseres litt, med 1,1 prosent. Når Månen befinner seg på motsatt side i forhold til Sola, reduseres tiltrekningen like mye. Når Månen og Jorda befinner seg side om side, i samme avstand fra Sola, vil tyngdekraften fra Sola virke til å forsterke tiltrekningen mellom Jorda og Månen med 0,55 prosent, halvparten av 1,1 prosent, det skyldes at Månen og Jorda begge tiltrekkes mot det samme punktet, nemlig sentrum i Sola. Gjennomsnittet over Månebanen blir en reduksjon i tiltrekning på $1,1 - 0,55 = 0,55$ prosent. Dermed ser det ut som om Jorda og Månen tilsammen har så mye mindre masse enn de i virkeligheten har. At dette overslaget gir feil resultat, ca. dobbelt så stor reduksjon som det vi faktisk observerer (5,5 promille i stedet for 3) har jeg ingen forklaring på.