# Løsninger, øving 1 for FY2450 Astrofysikk, til 15/1 2004

## Oppgave 1

Bruk Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_S + M_J)} \,,$$

der

$$P = 365{,}2564 \text{ døgn} = 365{,}2564 \text{ døgn } \frac{24 \;\; 3600 \text{ s}}{1 \text{ døgn}} = 31\,558\,153 \text{ s}$$

er omløpsperioden (ett siderisk år), $a = 1{,}496 \;\; 10^8$ km er store halvakse i jordbanen ($a$ er middelverdien av største og minste avstand mellom Jorda og Sola, pr. definisjon er det en astronomisk enhet), $M_S$ er solmassen og $M_J$ er jordmassen. Vi neglisjerer $M_J$ i sammenligning med $M_S$, det er en god tilnærming siden forholdet $M_S/M_J$ er 330 000. Vi regner altså at

$$M_S = M_S + M_J = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 1{,}989 \;\; 10^{30} \text{ kg} \,,$$

idet $G = 6{,}6726 \;\; 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ($G$ er Newtons gravitasjonskonstant).
Kommentar: med de oppgitte data bør svaret angis med tre desimaler. Nøyaktigheten i svaret begrenses av den relative usikkerheten på $10^{-3}$ i den oppgitte verdien for $a$. Siden $M_S$ er proporsjonal med $a^3$, får $M_S$ en relativ usikkerhet på anslagsvis $3 \;\; 10^{-3}$.

## Oppgave 2

Vi bruker stadig Keplers 3. lov,

$$M_J + M_M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \,,$$

men nå er omløpsperioden $P$ en siderisk måned,

$$P = 27{,}322 \text{ døgn} = 27{,}322 \text{ døgn } \frac{24 \;\; 3600 \text{ s}}{1 \text{ døgn}} = 2\,360\,621 \text{ s} \,,$$

mens $a$ er store halvakse i månebanen (middelverdien av største og minste avstand mellom Jorda og Månen), $a = 384\,400$ km. Den største massen $M_J$ er jordmassen, mens $M_M$ er månemassen. Vi neglisjerer igjen $M_M$ i sammenligning med $M_J$, det er ikke lenger en fullt så god tilnærming, siden forholdet $M_J/M_M$ er mindre enn 100. Vi regner altså at

$$M_J = M_J + M_M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = 6{,}031 \;\; 10^{24} \text{ kg} \,.$$

Den fasiten dette bør sammenlignes med, er tabellverdiene

$$M_J + M_M = 5{,}974 \;\; 10^{24} \text{ kg} + 7{,}349 \;\; 10^{22} \text{ kg} = 6{,}047 \;\; 10^{24} \text{ kg} \,.$$

Vi får altså et svar som er 3 promille for lite. Forklaringen kan være at vi ikke har regnet med gravitasjonskraften fra Sola på både Jorda og Månen.

## Oppgave 3

Gå ned til Trondheimsfjorden og mål forskjellen på havnivået ved flo og fjære. Denne forskjellen er proporsjonal med massen til Månen. Vi kan i hvert fall gjøre et grovt overslag over sammenhengen.
La $d$ være avstanden mellom Jorda og Månen (mer presist mellom sentrum av Jorda og sentrum av Månen), $d = 384\,400$ km. Husk at gravitasjonskraften mellom Jorda og Månen er den samme som om massen til hver av dem var samlet i sentrum. La videre $R_J$ være jordradien, $R_J = 6380$ km.
Hele Jorda faller inn mot Månen med en akselerasjon som er

$$a_J = \frac{GM_M}{d^2} = 3{,}319 \;\; 10^{-5} \text{ m/s}^2 \, .$$

En liten stein med masse $m$ må påvirkes av en kraft $F_0 = ma_J = GM_M m/d^2$ for å få denne akselerasjonen. Men hvis denne steinen f.eks. ligger på jordoverflaten på den siden som vender mot Månen, er tyngdekraften fra månen litt større, nemlig

$$F = \frac{GM_M m}{(d - R_J)^2} = \frac{GM_M m}{d^2} \frac{d^2}{(d - R_J)^2} = ma_J \frac{1}{\left(1 - \frac{R_J}{d}\right)^2} = ma_J \left(1 + \frac{2R_J}{d} + \cdots\right).$$

Differensen

$$\Delta F = F - F_0 \approx \frac{2GM_M m R_J}{d^3} = \frac{2ma_J R_J}{d} = 0{,}033 \;\; ma_J$$

er tidevannskraften fra månen på denne steinen. Legg merke til at den er omvendt proporsjonal med avstanden i tredje potens, det skyldes at den er proporsjonal med *variasjonen* til tyngdefeltet fra Månen. Hvis $m = 1$ kg, er $\Delta F = 1{,}10 \;\; 10^{-6}$ N.
Tidevannskraften fra Månen på jordoverflaten gir altså en relativ korreksjon på $10^{-7}$ til tyngdens akselerasjon $g = 10$ m/s$^2$. De stedene på jordoverflaten der tidevannskraften ikke er vertikal, kan den dermed forandre retningen av en loddlinje og helningen til en vannflate (vinkelrett på loddlinjen) med en vinkel på maksimalt $10^{-7}$ radianer. Over 10 000 km, som er 1/4 av omkretsen av Jorda, vil en helning av havoverflaten på $10^{-7}$ radianer gi en nivåforskjell på 1 meter. I følge dette grove overslaget skal altså forskjellen mellom flo og fjære være av størrelsesorden 1 meter. Hvis Månen hadde ti ganger større eller mindre masse, skulle flo og fjære være ti ganger større eller mindre.
Et stort mer nøyaktig estimat av massen til Månen skal en streve hardt for å oppnå med denne metoden. Det er ikke så vanskelig å regne mer nøyaktig med den idealiserte modellen vi bruker her. Men virkeligheten er mye mer komplisert, og flo og fjære varierer enormt fra sted til sted på Jorda, avhengig av lokale forhold. Det er f.eks. rimelig å tro at flo og fjære er mindre inne i Trondheimsfjorden enn ute på det åpne havet.

## Oppgave 4

Kraften mellom Jorda og Sola:

$$F_{JS} = \frac{GM_JM_S}{r_{JS}^2} = \frac{6{,}6726\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}\ 5{,}974\ 10^{24}\ \mathrm{kg}\ 1{,}989\ 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(1{,}496\ 10^{8}\ \mathrm{km})^2} = 3{,}543\ 10^{22}\ \mathrm{N}\ .$$

Kraften mellom Månen og Sola:

$$F_{MS} = \frac{GM_MM_S}{r_{MS}^2} = \frac{6{,}6726\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}\ 7{,}349\ 10^{22}\ \mathrm{kg}\ 1{,}989\ 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(1{,}496\ 10^{8}\ \mathrm{km})^2} = 4{,}358\ 10^{20}\ \mathrm{N}\ .$$

Kraften mellom Jorda og Månen:

$$F_{JM} = \frac{GM_JM_M}{r_{JM}^2} = \frac{6{,}6726\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}\ 5{,}974\ 10^{24}\ \mathrm{kg}\ 7{,}349\ 10^{22}\ \mathrm{kg}}{(3{,}844\ 10^{5}\ \mathrm{km})^2} = 1{,}983\ 10^{20}\ \mathrm{N}\ .$$

Kraften fra Sola på Månen er mer enn dobbelt så stor som kraften fra Jorda på Månen. Månen går rundt Sola, mer enn den går rundt Jorda!
Så hvorfor mister vi ikke Månen vår? Jo, fordi Jorda og Månen faller sammen innover mot Sola. Den kraften fra Sola som prøver å rive Månen vekk fra oss, er igjen en slags tidevannskraft. Når f.eks. Månen befinner seg mellom Jorda og Sola, er den tidevannskraften som sliter i Månen for å fjerne den fra oss, lik

$$\begin{aligned}\Delta F_{MS} &= \frac{GM_SM_M}{(r_{JS}-r_{JM})^{\,2}} - \frac{GM_SM_M}{r_{JS}^2} = \frac{GM_SM_M}{r_{JS}^2}\left(\frac{r_{JS}^{\,2}}{(r_{JS}-r_{JM})^{\,2}} - 1\right) \\ &= F_{MS}\left(\frac{2r_{JM}}{r_{JS}} + \cdots\right) = 5{,}14\ 10^{-3}\ \ F_{MS} = 2{,}24\ 10^{18}\ \mathrm{N}\ .\end{aligned}$$

Ikke stort mer enn en prosent av den kraften som Jorda holder fast på Månen med.
Merk: den akselerasjonen som Jorda og Månen tilsammen faller inn mot Sola med, er tyngdens akselerasjon fra Sola i det punktet som er massemiddelpunktet for Jorda og Månen tilsammen. Men dette massemiddelpunktet er ikke så langt fra sentrum av Jorda, fordi Jorda har så mye større masse enn Månen.
Til slutt en forklaring på hvorfor vi regner ut for liten samlet masse til Jorda og Månen i oppgave 2. Når Månen befinner seg mellom Jorda og Sola, er virkningen av tyngdekraften fra Sola den at tiltrekningen mellom Jorda og Månen reduseres litt, med 1,1 prosent. Når Månen befinner seg på motsatt side i forhold til Sola, reduseres tiltrekningen like mye. Når Månen og Jorda befinner seg side om side, i samme avstand fra Sola, vil tyngdekraften fra Sola virke til å forsterke tiltrekningen mellom Jorda og Månen med 0,55 prosent, halvparten av 1,1 prosent, det skyldes at Månen og Jorda begge tiltrekkes mot det samme punktet, nemlig sentrum i Sola. Gjennomsnittet over Månebanen blir en reduksjon i tiltrekning på $1{,}1 - 0{,}55 = 0{,}55$ prosent. Dermed ser det ut som om Jorda og Månen tilsammen har så mye mindre masse enn de i virkeligheten har. At dette overslaget gir feil resultat, ca. dobbelt så stor reduksjon som det vi faktisk observerer (5,5 promille i stedet for 3) har jeg ingen forklaring på.