Eksamen i Astrofysikk, fag FY 2450 (og MNFFY 250)
Fredag 4. juni 2004
Løsninger

1a) (Utredningen her er mye mer detaljert enn det som forlanges til eksamen, men hovedtrekkene bør kunne gjengis.)

Stadier i utviklingen: 1) Gass-skyen trekker seg sammen på grunn av gravitasjonen, dermed frigjøres gravitasjonsenergi, og halvparten av denne energien stråles ut (i følge virialteoremet), mens den andre halvparten omsettes til indre energi, dvs. at gassen varmes opp. I løpet av bare ett tusen år når overflatetemperaturen opp i 2000-3000 grader, halvparten av den nåværende overflatetemperaturen til Sola, og fordi overflatearealet er stort, er luminositeten på dette stadiet hundre ganger luminositeten som Sola har nå. Luminositeten avtar etter hvert som radien blir mindre, mens overflatetemperaturen er noenlunde konstant. Det vil si at denne protostjernen beveger seg nesten loddrett nedover i HR-diagrammet (langs en såkalt Hayashi-kurve), ned mot hovedserien (engelsk: the main sequence) i HR-diagrammet. Sammentrekkingen tar ca. 20 millioner år, og slutter når temperaturen og tettheten i sentrum blir høy nok til at fusjon av hydrogenkjerner til helium kan starte.

2) Sola er en hovedseriestjerne, dvs. at den fusjonerer hydrogen til helium *i sentrum*, i 10 milliarder år. Temperaturen i sentrum er ca. 15 millioner grader. Etter hvert som hydrogenbeholdningen i sentrum brukes opp, øker radien og luminositeten litt, men ikke mye.

3) Når hydrogenbeholdningen i sentrum er helt brukt opp, starter sammentrekkingen av kjernen på nytt. Temperaturen i sentrum øker, mens overflatetemperaturen avtar. Samtidig øker radien og luminositeten, og stjernen blir en rød kjempestjerne. Luminositeten øker opp mot 1000 ganger luminositeten i hovedseriestadiet.

4) Når temperaturen i sentrum når 100 millioner grader, starter fusjonering av heliumkjerner til karbon- og oksygenkjerner. Starten av heliumfusjonen skjer (for en stjerne med mindre enn 2-3 solmasser) eksplosivt, i et "heliumblink". Årsaken til at fusjonsprosessene løper de løpsk i starten, er at reaksjonshastigheten øker svært raskt med temperaturen (omtrent som 40. potens av temperaturen), og at elektronene er degenererte, følgelig er trykket nesten uavhengig av temperaturen, slik at den plutselige oppvarmingen kan foregå uten at gassen utvider seg straks.

5) Etter heliumblinket fortsetter heliumfusjoneringen i kjerneområdet i stjernen som en kontrollert prosess, samtidig som hydrogen fusjoneres i et skall rundt omkring. Dette stadiet varer i 100 millioner år, og i den tiden er luminositeten nesten konstant (avtar litt), mens radien minker og overflatetemperaturen øker. Det betyr at stjernen beveger seg nesten horisontalt mot venstre i HR-diagrammet (langs den "horisontale grenen").

6) Etter at heliumbeholdningen i sentrum er brukt opp, starter stjernekjernen igjen å trekke seg sammen og samtidig varmes opp. Sammentrekningen fortsetter til elektronene igjen blir degenererte. Heliumfusjon og hydrogenfusjon fortsetter i to atskilte skall utover fra sentrum. Stjernen blir igjen en rød kjempe, med enda større luminositet enn tidligere. Den beveger seg i HR-diagrammet opp mot høyre, langs den "asymptotiske kjempegrenen". Luminositeten øker opp mot 10 000 ganger luminositeten i hovedseriestadiet.

Dette stadiet varer en halv million år. Da er stjernen ganske ustabil, og kaster av seg tilsammen ca. halvparten av massen, mens den går gjennom flere sykluser der fusjonering av hydrogen og helium i skall slås av og på.

7) Etter at alle fusjonsprosessene stopper, sitter vi igjen med en hvit dverg av karbon og oksygen, der elektronene er degenererte. I noen tusen år vil den hvite dvergen være omgitt av en planetarisk tåke, som består av den massen som er kastet ut i rommet. Overflatetemperaturen til den hvite dvergen er over 100 000 grader til å begynne med, men avtar etter hvert som hele stjernen avkjøles.

1b) Det meste av alt helium som finnes, ble dannet i løpet av de første ti minuttene etter "Big Bang". Dengang fantes det frie nøytroner, som kunne slå seg sammen med protoner til døyteriumkjerner. To døyteriumkjerner kunne så slå seg sammen til en heliumkjerne.
Helium dannes også av hydrogen i stjerner, særlig i hovedseriestjerner. Der er råmaterialet protoner, og prosessen starter med at to protoner danner en døyteriumkjerne pluss et positron og et elektronnøytrino. Døyteriumkjernen omdannes straks til en ^{3}He-kjerne ved kollisjon med et proton. ^{3}He-kjernen finner vanligvis ingen andre partikler å reagere med før den finner en annen ^{3}He-kjerne, og de to slår seg sammen til en ^{4}He-kjerne pluss to protoner.
Når det ikke finnes mer hydrogen igjen i kjernen i en hovedseriestjerne, trekker kjernen seg sammen, med det resultat at temperaturen øker, og ^{4}He i kjernen omdannes til ^{12}C og ^{16}O.
Når det ikke finnes mer helium igjen i kjernen i en hovedseriestjerne med masse over 4 solmasser, trekker kjernen seg sammen igjen, temperaturen øker videre, og karbon i kjernen omdannes til oksygen, neon, natrium og magnesium.
I stjerner med tilstrekkelig stor masse kan det på denne måten produseres grunnstoffer opp til jern. For at grunnstoffer tyngre enn jern skal produseres, må det tilføres enrgi. Det kan skje i supernova-eksplosjoner, som samtidig sprer de produserte grunnstoffene ut i verdensrommet.
Det trengs høy temperatur for å fusjonere atomkjerner fordi den elektriske frastøtningen (Coulomb-kraften) mellom atomkjernene må overvinnes. Det kan skje når kjernene har tilstrekkelig høy kinetisk energi, altså når temperaturen er tilstrekkelig høy.
De grunnstoffene som det finnes mest av, er de som produseres lettest i de fusjonsprosessene som skjer i stjernene, og det er stort sett de mest stabile blant de lette atomkjernene, slike som ^{4}He, ^{12}C og ^{16}O. Heliumkjerner er spesielt stabile fordi de inneholder to protoner og to nøytroner. En enkel modell for atomkjerner, kalt skallmodellen, beskriver bindingen mellom protonene og nøytronene ved å anta at de beveger seg i en potensialbrønn der de ikke vekselvirker med hverandre. I følge kvantemekanikken har en partikkel i en slik potensialbrønn en eneste grunntilstand, der energien er minimal. Protoner og nøytroner er fermioner med spinn 1/2, dvs. at en partikkel har to spinntilstander (opp eller ned). I følge Pauli-prinsippet er det plass til maksimalt to protoner og to nøytroner i grunntilstanden i potensialbrønnen, og da har vi en heliumkjerne. Ved å slå sammen tre eller fire heliumkjerner kan en lage en kjerne av ^{12}C eller ^{16}O, derfor er disse kjernene også spesielt stabile.
Det spesielle med jernkjerner er at de er maksimalt stabile, idet de har maksimal bindingsenergi pr. nukleon. Grunnstoffene som er tyngre enn jern, kan derfor bare dannes i prosesser der det tilføres energi, og de er derfor sjeldnere enn de grunnstoffene som er lettere enn jern.

1c) Klassifiseringen av stjerner i populasjon I og II baserer seg på direkte observerbare egenskaper. Det viktigste spørsmålet å svare på her, er hvilke kjennetegn vi har når vi observerer stjernene, det nest viktigste er hvordan det vi observerer, kan forklares teoretisk.
Spektrene til stjerner fra de to populasjonene er vesentlig forskjellige. Lyset fra stjerner som tilhører populasjon II, viser nesten ikke spektrallinjer fra de grunnstoffene som astronomene kaller "metaller", dvs. de som er tyngre enn hydrogen og helium. Det har sin naturlige forklaring i at (de aller fleste av) disse stjernene er gamle. De er førstegenerasjons-stjerner, som oppsto av "urstoff fra Big Bang" som ikke tidligere var prosessert i stjerner og dermed anriket på tyngre grunnstoffer.
Stjerner som tilhører populasjon I, viser tydelige spektrallinjer fra mange grunnstoffer. Disse stjernene er yngre, de er andre- og tredjegenerasjons-stjerner dannet av stoff som var anriket på tyngre grunnstoffer ved at noe allerede var prosessert i tidligere stjerner.
Den synlige fargen er en annen forskjell mellom de to populasjonene, den har også med spektrene å gjøre. Fordi populasjon II består av gamle stjerner, er ingen av dem blant de mest massive og lyssterke stjernene. I populasjon I dominerer de massive stjernene av spektralklassene O og B, fordi de er så lyssterke. De er blå kjempestjerner, med høy overflatetemperatur, og derfor ser et område av en galakse med stjerner av populasjon I mer blått ut enn et område med stjerner av populasjon II. De blå kjempestjernene er utdødd blant populasjon II, fordi de ikke lever mer enn noen ganske få millioner år.
En tredje observerbar forskjell er hvor i en galakse de to populasjonene er å finne. Elliptiske galakser består mest av stjerner av populasjon II. I en typisk spiralgalakse er populasjon II å finne i sentrum av galaksen, mellom spiralarmene og i kuleformede stjernehoper, mens populasjon I finnes særlig i spiralarmene, der det tydeligvis dannes nye stjerner hele tiden. Denne populasjonsforskjellen er den vesentlige grunnen til at spiralarmene i en spiralgalkse er så tydelige.
Sola tilhører populasjon I, ett bevis er at solsystemet, inkludert oss selv, inneholder ganske mye av grunnstoffer tyngre enn helium.

1d) Stjernene i en stjernehop, åpen eller kuleformet, er antagelig noenlunde like gamle, og alderen kan bestemmes ved hjelp av HR-diagrammet over alle stjernene i hopen. Et slikt HR-diagram viser gjerne et bånd som bøyer av fra hovedserien, oppover og mot høyre i diagrammet, på et sted som tilsvarer en bestemt alder av stjernene.
De åpne stjernehopene finnes mest i planet til Melkeveien. Fordi de inneholder relativt få stjerner (noen hundre eller noen tusen), er de svakt bundet sammen av gravitasjonen, og mister medlemmer etter hvert. De kan være fra noen millioner år gamle og opp til noen milliarder år.
De kuleformete stjernehopene er gamle, opp til 12-13 milliarder år. De inneholder mange stjerner, opp til en million stjerner i hver, og som navnet sier, er de kulformete. De fordeler seg utover mer eller mindre kulesymmetrisk i et volum sentrert om sentrum av Melkeveien. For Shapley var denne fordelingen i rommet av de kuleformete stjernehopene en hypotese som han brukte til å lokalisere sentrum av Melkeveien. Han målte systematisk avstand og retning til 93 kuleformete stjernehoper og fant hvordan de fordeler seg i rommet.

1e) Avstandsmåling ved hjelp av RR Lyrae-stjerner og Kefeider baserer seg på at disse stjernene er pulserende variable stjerner. Luminositeten til en slik stjerne varierer med en bestemt periode, og det eksisterer en sammenheng mellom (den midlere) luminositeten og perioden, slik at f.eks. de RR Lyrae-stjernene som har lengst periode, er de som har størst luminositet. Shapley observerte altså perioder og tilsynelatende lysstyrker til RR Lyrae-stjerner, og fra disse dataene kunne han beregne svstandene. Metoden må kalibreres ved hjelp av noen stjerner som er nær nok til at avstandene kan måles ved (spektroskopisk) parallakse.

1f) Avstands-stigen består av en serie metoder til avstandsmåling. Hvert trinn i stigen er en metode som må kalibreres mot de lavere trinnene.
– Parallaksemåling er den eneste direkte geometriske metoden. Ved hjelp av Hipparkos-satellitten er den brukt ut til avstander på 1500 lysår.
– Spektroskopisk parallakse er en metode med et misvisende navn. Ved hjelp av spektret til en stjerne bestemmes stjernetypen og dermed luminositeten. Ut fra den målte tilsynelatende lysstyrken kan en så beregne avstanden. Metoden kan brukes ut til 30 000 lysår.
– Sammenhengen mellom periode og luminositet for RR Lyrae-variable stjerner kan brukes ut til 300 000 lysår. Kefeider er mye mer lyssterke og kan brukes ut til å måle avstander ut til 100 millioner lysår, altså til mange av de nærmeste galaksene.
– Supernovaer av type Ia brukes ut til flere milliarder lysår.
– En mer spesialisert metode er Tully-Fischer-relasjonen. Bredden av 21 cm spektrallinjen i radiostrålingen fra en spiralgalakse henger sammen med rotasjonshastigheten til galaksen, og følgelig med massen og dermed også med luminositeten til galaksen som helhet. En lignende metode finnes også for elliptiske galakser.

1g) Det ser ut til at forbausende mange ikke oppfattet at det ble spurt etter de *direkte observerbare* kjennetegnene på en pulsar. Pulsarer ble først observert utelukkende med radioteleskop, og fremdeles er det slik at en pulsar uten radiostråling er en raritet.
Pulsarer kalles de fordi vi observerer stråling fra dem som kommer i korte pulser, av varighet gjerne noen millisekunder. Pulsene repeteres med perioder fra litt mer enn et millisekund og opp til noen sekunder. De fleste pulsarene observeres som sagt i radiobølgeområdet, noen få observeres i synlig lys, og noen flere observeres i røntgenområdet eller til og med i gamma-området.
En god grunn til å tro at pulsarer er nøytronstjerner, er rett og slett at det er den eneste forklaringen som er foreslått og som ser ut til å være holdbar. Lyset beveger seg 300 km på et millisekund, og det betyr at et objekt som sender ut millisekundpulser kan ikke være mer enn noen få kilometer i utstrekning, men selvfølgelig kunne strålingen komme fra en liten flekk på et større objekt.
Bare nøytronstjerner kan rotere med perioder under ett sekund og likevel holdes sammen av gravitasjonen. Elektriske krefter og kjernekrefter er ikke sterke nok, bl.a. fordi elektriske ladninger har en tendens til å nøytralisere hverandre, og kjernekreftene har rekkevide på bare 10^{-15} m.
Videre kan røntgenstråling fra pulsarer forklares med at det vil frigjøres mye gravitasjonsenergi når masse faller ned på en nøytronstjerne, opptil 10-20% av hvileenergien til den massen som faller. En tredje god grunn er at pulsarer kan assosieres med supernovaeksplosjoner, det gjelder i hvert fall pulsaren i Krabbetåken, og en viktig teoretisk mekanisme for supernovaeksplosjoner bygger på at det vil oppstå en nøytronstjerne inne i en massiv stjerne (med mellom 8 og 25 solmasser) når stjernen brenner ut.

1h) Vinkelfrekvens:

$$\omega = \frac{eB}{m} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 10^{10}\ \mathrm{T}}{9{,}109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 1{,}759\ 10^{21}/s\ .$$

Omregning til energi:

$$\hbar\omega = 1{,}055 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js} \times 1{,}759\ 10^{21}/s = 1{,}855 \times 10^{-13}\ \mathrm{J} = 2{,}266\ mc^2\ .$$

Når splittingen mellom energinivå blir sammenlignbar med hvileenergien mc^2, betyr det at det er nødvendig å regne relativistisk. Det betyr igjen at det uttrykket vi bruker her for energisplittingen, nemlig eB/m, faktisk ikke er gyldig.

1i) En venuspassasje varer maksimal tid når vi ser Venus passere over midten av solskiva. For å beregne den tiden t som den varer, gjør vi noen tilnærminger som forenkler regningen mye, og som dessuten er gode tilnærminger. Vi antar at Jorda og Venus går i sirkelbaner i samme plan og i samme omløpsretning. La $d_J = 1$ AU (1 astronomisk enhet) være radien i jordbanen, og $d_V = 0{,}723$ AU radien i venusbanen, mens v_J og v_V er banehastighetene til Jorda og Venus. Definer $f = d_V/d_J = 0{,}723$. I følge Newtons andre lov og gravitasjonsloven gjelder for sirkelbaner at

$$\frac{v_J}{v_V} = \frac{\sqrt{d_V}}{\sqrt{d_J}} = \sqrt{f}\ .$$

Vi bruker også at solradien R_S er mye mindre enn d_J.
Idet venuspassasjen starter, ligger Jorda og Venus på en rett linje som peker mot den ene (venstre) kanten av Sola. Idet venuspassasjen slutter, tiden t senere, ligger Jorda og Venus på en annen rett linje som peker mot den andre (høyre) kanten av Sola. I tidsrommet t har Jorda beveget seg avstanden $v_J t$, mens Venus har beveget seg avstanden $v_V t$. Siden $v_V > v_J$, vil de to rette linjene møtes på samme side av Sola som Jorda og Venus, i en (foreløpig ukjent) avstand x fra Sola. Ved å se på likeformede trekanter finner vi at

$$\frac{x}{2R_S} = \frac{x - d_V}{v_V t} = \frac{x - d_J}{v_J t}\ .$$

Disse ligningene gir to løsninger for x,

$$x = \frac{2R_S d_V}{2R_S - v_V t} = \frac{2R_S d_J}{2R_S - v_J t}\ .$$

Følgelig er

$$\frac{2R_S - v_V t}{2R_S d_V} = \frac{2R_S - v_J t}{2R_S d_J}\ .$$

Dermed finner vi den etterspurte tiden t,

$$t = \frac{\dfrac{1}{d_V} - \dfrac{1}{d_J}}{\dfrac{v_V}{2R_S d_V} - \dfrac{v_J}{2R_S d_J}} = 2R_S\,\frac{d_J - d_V}{d_J v_V - d_V v_J} = 2R_S\,\frac{1-f}{v_V - f v_J} = \frac{2R_S}{v_J}\,\frac{1-f}{\dfrac{1}{\sqrt{f}} - f}$$

$$= \frac{2R_S}{v_J}\,\frac{\sqrt{f}\,(1-(\sqrt{f})^2)}{1-(\sqrt{f})^3} = \frac{2R_S}{v_J}\,\frac{\sqrt{f}\,(1+\sqrt{f})}{1+\sqrt{f}+f}\ .$$

Vi bruker de matematiske identitetene $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ og $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$. Banehastigheten til Jorda er

$$v_J = \frac{2\pi \text{ AU}}{1 \text{ år}} = 30 \text{ km/s} .$$

Altså blir

$$\begin{aligned} t &= 1 \text{ år} \, \frac{R_S}{\pi \text{ AU}} \frac{\sqrt{f}\,(1+\sqrt{f})}{1+\sqrt{f}+f} = 1 \text{ år} \, \frac{7{,}0 \times 10^5 \text{ km} \sqrt{0{,}723}\,(1+\sqrt{0{,}723})}{\pi \times 1{,}50 \times 10^8 \text{ km}\,(1+\sqrt{0{,}723}+0{,}723)} \\ &= 0{,}000908 \text{ år} = 0{,}000908 \times 365{,}256 \times 24 \text{ timer} = 7{,}96 \text{ timer.} \end{aligned}$$

Har jordrotasjonen noen betydning for den maksimale varigheten? En observatør på ekvator, sammenlignet med en observatør på nordpolen eller sørpolen, beveger seg jo med en ekstra hastighet i motsatt retning av banehastigheten til Jorda. Men denne hastigheten, som er 40 000 km pr. døgn, en halv kilometer i sekundet, er liten sammenlignet med banehastigheten $v_J = 30$ km/s.
Det finnes selvsagt mange forskjellige veier som fører fram til et korrekt svar. I hvert fall en kandidat ga følgende resonnement, som kanskje er enklere. Sett fra Jorda beveger Sola seg med hastigheten v_J i forhold til fiksstjernene, i retning mot øst, og siden avstanden er d_J, er vinkelhastigheten

$$\omega_S = \frac{v_J}{d_J} .$$

Vi ser bort fra jordrotasjonen, fordi effekten av den er neglisjerbar, som sagt. Fremdeles som sett fra Jorda, beveger Venus seg med en hastighet mot øst som er $v_J - v_V$, denne hastigheten er negativ, det vil altså si at vi ser Venus bevege seg mot vest i forhold til fiksstjernene. Siden avstanden til Venus er $d_J - d_V$, har Venus en vinkelhastighet som er

$$\omega_V = \frac{v_J - v_V}{d_J - d_V} .$$

Vi kan merke oss at ω_S og ω_V har motsatt fortegn. Sett fra Jorda utgjør soldiameteren en synsvinkel som er

$$\theta_S = \frac{2R_S}{d_J} .$$

Den tiden det tar Venus å passere over en soldiameter, er følgelig

$$t = \frac{\theta_S}{\omega_S - \omega_V} = \frac{2R_S}{d_J} \frac{1}{\frac{v_J}{d_J} - \frac{v_J - v_V}{d_J - d_V}} = 2R_S \frac{d_J - d_V}{d_J v_V - d_V v_J} .$$

Det samme svaret som vi fant ovenfor.

En annen kandidat ga (omtrent) følgende elegante svar. Vi kan tenke oss at vi ser hele venuspassasjen fra sentrum av Sola. Midt under passasjen ser vi da Venus og Jorda på linje. I det øyeblikket venuspassasjen slutter, ser vi en vinkel α mellom Venus og Jorda, og α kan vi beregne på følgende måte. La punktet J i et plan (som er felles baneplan til Jorda og Venus) være posisjonen til Jorda, la V være posisjonen til Venus, og la S være sentrum av Sola. Den rette linjen gjennom punktene J og V går gjennom et punkt R på randen av Sola. Vinkelen α er vinkelen JSV. Vinkelen RJS kaller vi β, og vinkelen

RVS kaller vi γ. Da er $\gamma = \alpha + \beta$ (denne ligningen er ekvivalent med det teoremet som sier at vinkelsummen i en trekant er 180 grader). Altså er

$$\alpha = \gamma - \beta = \frac{R_S}{d_V} - \frac{R_S}{d_J} \,.$$

Vi ser Jorda og Venus bevege seg med vinkelhastigheter henholdsvis $\omega_J = v_J/d_J$ og $\omega_V = v_V/d_V$, og det gir at tiden for hele venuspassajen er

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_V - \omega_J} = 2R_S \, \frac{d_J - d_V}{d_J v_V - d_V v_J} \,.$$

1j) En venuspassasje inntreffer når Sola, Venus og Jorda ligger tilnærmet på en rett linje. Fordi Venus og Jorda beveger seg i litt forskjellige baneplan, med 3,39 grader vinkel mellom, skjer det to ganger hvert år, nemlig tidlig i juni og i desember, at Jorda passerer gjennom baneplanet til Venus. En venuspassasje får vi dersom Venus tilfeldigvis nettopp da befinner seg mellom Jorda og Sola. Det skjer nå, i juni 2004. Om 8 år, som er $8 \times 365{,}256 = 2922{,}048$ dager, er Venus igjen mellom Jorda og Sola, fordi i dette tidsrommet gjør Venus tilfeldigvis nesten nøyaktig 13 omløp om Sola, antallet omløp er

$$\frac{2922{,}048 \text{ dager}}{224{,}70 \text{ dager}} = 13{,}0042 \,.$$

Med andre ord: 8 jordår er nesten nøyaktig lik 13 venusår.

1k) La M_J og M_S være massene til Jorda og Sola, la d_J og d_V være avstandene fra Sola til Jorda og Venus, og så videre. Forholdet mellom tidevannskraften på Venus fra Jorda og fra Sola er

$$\frac{\dfrac{GM_J}{(d_J - d_V)^3}}{\dfrac{GM_S}{d_V^3}} = \frac{M_J}{M_S}\left(\frac{d_V}{d_J - d_V}\right)^3 = \frac{6{,}0 \times 10^{24}}{2{,}0 \times 10^{30}}\left(\frac{0{,}723}{1 - 0{,}723}\right)^3 = 5{,}3 \times 10^{-5} = \frac{1}{1{,}87 \times 10^4} \,.$$

Rått parti, med andre ord.
Men når det gjelde Merkur, for eksempel, er det *variasjonen* i tidevannskraften over hele omløpsbanen som gjør at Merkur alltid snur samme side mot Sola ved perihel. Variasjonen i tidevannskraften fra Sola på Venus er proporsjonal med

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{GM_S}{((1-e)d_V)^3} - \frac{GM_S}{((1+e)d_V)^3} = \frac{GM_S}{d_V^3}\left(\frac{1}{(1-e)^3} - \frac{1}{(1+e)^3}\right) \\
&\approx \frac{GM_S}{d_V^3}\,((1+3e) - (1-3e)) = \frac{GM_S}{d_V^3}\,6e \,,
\end{aligned}$$

der $e = 0{,}0068$ er eksentrisiteten til ellipsebanen for Venus. Om vi sammenligner tidevannskraften på Venus fra Jorda med variasjonen i tidevannskraften fra Sola, får vi altså en ekstra faktor $1/(6e)$, og forholdet blir

$$\frac{5{,}3 \times 10^{-5}}{6e} = 1{,}31 \times 10^{-3} = \frac{1}{765} \,.$$

Fremdeles ganske rått parti.
Etter dette regnestykket er det litt vanskelig å tro at det er noe mer enn en tilfeldighet

som gjør at Venus snur samme side mot Jorda hver gang de to planetene kommer nærmest hverandre. Venus burde heller snu samme side mot Sola hver gang de to kommer nærmest hverandre.

2a) En enkelt partikkel med masse m og hastighet v (v er absoluttverdien av hastigheten) har kinetisk energi $E_{K1} = (1/2)mv^2 \geq 0$. Siden $E = -E_K$, der E_K er den kinetiske energien summert over alle partiklene, må $E < 0$.

2b) Når gass-skyen utvider seg, vil V bli mindre negativ, dvs. at $V \to V + \Delta V$ med $\Delta V > 0$. Når dette skjer mens $E = E_K + V$ er konstant, må $E_K \to E_K + \Delta E_K$ med $\Delta E_K = -\Delta V < 0$. Forandringen i $2E_K + V = 2E - V$ blir da også $-\Delta V < 0$.
Vi ser at hvis størrelsen $2E_K + V$ er positiv, altså for stor til at vi kan ha likevekt, så vil den avta mot 0. Det motsatte vil skje dersom $2E_K + V$ er negativ, da vil den øke mot 0. Det tyder på at en stasjonær tilstand med $2E_K + V = 0$ er stabil: små avvik fra den stasjonære tilstanden vil avta med tiden.

2c) Siden $E < 0$, $E_K = -E$ og $V = 2E$, ser vi at når E avtar, så må E_K øke og V avta, dvs at V må bli mer negativ. Når systemet stråler ut en positiv energi E_S til omgivelsene, så øker samtidig den totale kinetiske energien med samme beløp E_S, og den potensielle energien (gravitasjonsenergien) til systemet tappes med beløpet $2E_S$.
Dette viser at et slikt gravitasjonelt bundet system, dominert av gravitasjon, har negativ varmekapasitet: utstråling av energi fører til at den totale kinetiske energien, det vil si den gjennomsnittlige temperaturen, øker.
Når V blir mer negativ, betyr det også at radien avtar.

2d) Sett $2E_K + V = 0$, altså

$$3Nk_BT = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \; ,$$

hvis vi setter den numeriske faktoren a lik 3/5. Vi kan dividere med $3N$ og skrive

$$k_BT = \frac{GM\overline{m}}{5R} \; .$$

I denne oppgaven var massetettheten ρ gitt, da er

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \; ,$$

følgelig

$$k_BT = \frac{4\pi}{15}G\rho\overline{m}R^2 \; .$$

Det gir at

$$R = \sqrt{\frac{15k_BT}{4\pi G\rho\overline{m}}} \; .$$

Vi antar at gassen besto av nøytralt hydrogen og helium. Massen av et hydrogenatom er (tilnærmet) lik protonmassen m_p, mens massen av et heliumatom er (tilnærmet) lik $4m_p$. Siden masseforholdet mellom hydrogen og helium var tre til en, var det altså 12 hydrogenatomer pr. heliumatom, altså 13 atomer for en masse på $16m_p$, slik at den gjennomsnittlige massen pr. partikkel i gassen av nøytrale atomer var

$$\overline{m} = 16m_p/13 = 2{,}06 \times 10^{-27} \text{ kg} \; .$$

En numerisk verdi for radien blir da

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{\frac{15 \times 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \times 3000\ \mathrm{K}}{4\pi \times 6{,}673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times 10^{-18}\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \times 2{,}06 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} \\
&= 6{,}00 \times 10^{17}\ \mathrm{m} = 63{,}4\ \text{lysår}\ .
\end{aligned}$$

Den tilsvarende massen er

$$\begin{aligned}
M &= \frac{4\pi}{3}\,\rho R^3 = \frac{4\pi}{3}\,\rho \left(\frac{15 k_B T}{4\pi G \rho \overline{m}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho}\left(\frac{5 k_B T}{G\overline{m}}\right)^3} \\
&= 9{,}03 \times 10^{35}\ \mathrm{kg} = 450\,000\ \text{solmasser}\ .
\end{aligned}$$

Dette er en typisk masse for en kuleformet stjernehop i Melkeveien. En typisk galakse nå til dags har en masse som er 10^5 ganger større, men den kan ha oppstått ved sammenslåing av tusenvis av mindre deler.

2e) Her bruker vi om igjen formelen ovenfor,

$$k_B T = \frac{G M \overline{m}}{5R}\ .$$

Nå har vi gitt massen M, lik solmassen, og vi får at

$$\begin{aligned}
R &= \frac{G M \overline{m}}{5 k_B T} = \frac{6{,}673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times 2{,}0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg} \times 2{,}06 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{5 \times 1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \times 10\ \mathrm{K}} \\
&= 3{,}98 \times 10^{14}\ \mathrm{m} = 0{,}0421\ \text{lysår} = 2660\ \mathrm{AU}\ .
\end{aligned}$$

Det gir en gjennomsnittlig massetetthet som er

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3}{4\pi M^2}\left(\frac{5 k_B T}{G\overline{m}}\right)^3 = 7{,}55 \times 10^{-15}\ \mathrm{kg/m^3}\ .$$

Det er interessant å sammenligne med Sola slik den er nå. I sluttformelen for ρ er alt konstant, bortsett fra temperaturen T, og vi ser at ρ er proporsjonal med T^3. Gjennomsnittlig temperatur for Sola nå er rundt regnet 10^7 K, og gjennomsnittlig massetetthet er omtrent lik tettheten av vann, $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. Dengang temperaturen var 10 K, altså 10^6 ganger mindre, skulle tettheten være $(10^6)^3 = 10^{18}$ ganger mindre, dvs. $10^{-15}\ \mathrm{kg/m^3}$.