Regneøving 2 for FY2450 Astrofysikk, til 22/1 2004

1. Oppgave 35, kapittel 4 i læreboken.
   Den tradisjonelle metoden for å reise (eller sende romsonder) til andre planeter, er å bruke rakettmotorene helt i starten, for å forlate jordbanen, og helt til slutt, for å gå inn i samme bane rundt Sola som den planeten en reiser til.
   Den banen som beskrives i oppgave 4.35 for et romskip eller en romsonde til Venus, kalles en minimum-energi-bane. Hvorfor?

2. For å beregne planetbaner antar en som regel at både Sola og planetene er punktmasser. Det kan virke rimelig, ettersom Sola og planetene er små sammenlignet med avstandene mellom dem. Newton fant imidlertid en bedre begrunnelse for å regne med punktmasser, nemlig at Sola og planetene alle er nesten perfekt kulesymmetriske.
   a) Vis at gravitasjonskraften mellom en kulesymmetrisk planet (eller stjerne) og en punktmasse utenfor den, er den samme som om all massen til planeten var samlet i sentrum.
   b) Vis at gravitasjonskraften mellom to kulesymmetriske planeter er den samme som om hver av planetene hadde all sin masse samlet i sitt sentrum.

3. Oppgave 44 fra kapittel 4.
   Den som synes at denne oppgaven er for enkel, kan generalisere litt, og beregne tidevannskraften fra Månen i et vilkårlig punkt på jordoverflaten.
   Vi må da studere tyngdefeltet fra Månen. Hvis posisjonen til sentrum av Månen er $\vec{r}_M$, så er tyngdens akselerasjon i tyngdefeltet fra Månen, for en partikkel i posisjonen $\vec{r}$, lik

   $$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM_M}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^3}\,(\vec{r} - \vec{r}_M)\ .$$

   Her er M_M massen til Månen. Vi kan velge et passende koordinatsystem, slik at sentrum av Månen ligger i origo, med koordinater $(x_M, y_M, z_M) = (0,0,0)$, og at sentrum av Jorda ligger i punktet $(x_J, y_J, z_J) = (d,0,0)$, der d er avstanden mellom Jorda og Månen.
   a) Hele jordkloden må ha samme akselerasjon i tyngdefeltet fra Månen, ellers ville den bli deformert. Denne akselerasjonen er lik verdien av $\vec{g}(\vec{r})$ i sentrum av Jorda. Hvorfor?
   b) En liten masse m befinner seg på jordoverflaten, i posisjonen
   $(x,y,z) = (x_J + \Delta x, y_J + \Delta y, z_J + \Delta x) = (d + \Delta x, \Delta y, \Delta z)$. For at denne massen skal få samme akselerasjon som hele jordkloden, må Jorda skyve eller trekke på den med en liten kraft $\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$. Vi antar at størrelsene Δx, Δy og Δz er små nok til at vi kan regne med at K_x, K_y og K_z varierer lineært med Δx, Δy og Δz.
   Vi antar altså at

   $$\begin{aligned} K_x &= K_{xx}\Delta x + K_{xy}\Delta y + K_{xz}\Delta z\ , \\ K_y &= K_{yx}\Delta x + K_{yy}\Delta y + K_{yz}\Delta z\ , \\ K_z &= K_{zx}\Delta x + K_{zy}\Delta y + K_{zz}\Delta z\ . \end{aligned}$$

   Vi antar at $\vec{K} = 0$ for $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, hvorfor er det korrekt?
   Beregn koeffisientene K_{xx}, K_{xy}, osv..
   Hvorfor må for eksempel $K_{yy} = K_{zz}$?
   Hva blir $K_{xx} + K_{yy} + K_{zz}$?
   Kommentar: Tidevannskraften på massen m er $-\vec{K}$, den er et eksempel på det vi kaller en fiktivkraft (fordi den ikke oppfyller Newtons 3. lov), og vi opplever den på Jorda fordi vi ikke er i et inertialsystem, men er akselerert i tyngdefeltet fra Månen.
   c) Hvordan varierer tidevannskraften med avstanden d?
   Hvilken betydning har det for forholdet mellom tidevannskreftene som skyldes Månen og Sola?