

Løsninger, innleveringsøving for FY2450 Astrofysikk, våren 2009

Dette er ikke en mønsterløsning, det forventes ikke like utførlige redegjørelser til eksamen. Dette er ment som et eksempel på hvordan en kan *tenke*, mer enn hvordan en bør *skrive*. Men skriv helst tilstrekkelig utførlig til at det går fram hvordan du har tenkt. Et galt resonnement som er godt forklart, vil bli mildere bedømt til eksamen enn en slurvfeil uten forklaring til!

1a) Bruk Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)},$$

der P er omløpsperioden, a er avstanden mellom stjernene (mer presist: a er middelveidien av største og minste avstand, som er det samme som største halvakse i den elliptiske banen som den ene stjernen følger rundt den andre), og m_1 og m_2 er de to massene.

Sammenligner vi med Jordas bane rundt Sola, der perioden er 1 år, mens avstanden er 1 AU = 1 astronomisk enhet = 150 millioner kilometer, og summen av massene er solmassen $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg (fordi jordmassen er neglisjerbar), så får vi at

$$\left(\frac{P}{1 \text{ år}}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{m_1 + m_2}\right) \left(\frac{a}{1 \text{ AU}}\right)^3$$

dvs. at

$$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \left(\frac{1 \text{ år}}{P}\right)^2 \left(\frac{a}{1 \text{ AU}}\right)^3 = \frac{24^3}{79,9^2} = 2,17.$$

Summen av massene er 2,17 solmasser. Følgelig må i hvert fall den ene av de to stjernene ha litt større masse enn Sola. Når den har litt større masse, har den også litt større luminositet, se oppgave 2.

Denne måten å regne på er absolutt den enkleste, og gir svaret i en fornuftig enhet, nemlig i antall solmasser. Men det er selvfølgelig fullt mulig å regne ut svaret direkte i kilogram:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 (24 \times 150 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} (79,9 \times 365,25 \times 24 \times 3600 \text{ s})^2} = 4,34 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

1b) Vi må først beregne omløpsperioden, som er omkretsen av en sirkel dividert med hastigheten:

$$P = \frac{2\pi \cdot 26\,000 \text{ lysår}}{220 \text{ km/s}} = \frac{2\pi \cdot 26\,000 \times 300\,000 \text{ (km/s) år}}{220 \text{ km/s}} = 2,23 \cdot 10^8 \text{ år}$$

For å bruke samme formel som ovenfor til å beregne massen med solmassen som enhet, må vi dessuten uttrykke avstanden til sentrum av Melkeveien i astronomiske enheter:

$$\begin{aligned} a &= 26\,000 \text{ lysår} = 26\,000 \times 300\,000 \text{ (km/s) år} \\ &= 26\,000 \times 300\,000 \text{ km/s} \times 365,25 \times 24 \times 3600 \text{ s} \\ &= 2,46 \cdot 10^{17} \text{ km} = 2,46 \cdot 10^{17} \text{ km} \frac{1 \text{ AU}}{150 \cdot 10^6 \text{ km}} = 1,64 \cdot 10^9 \text{ AU}. \end{aligned}$$

Massen M i Melkeveien innenfor Solas bane skulle da være gitt av ligningen

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{1 \text{ år}}{P}\right)^2 \left(\frac{a}{1 \text{ AU}}\right)^3 = \frac{(1,64 \cdot 10^9)^3}{(2,23 \cdot 10^8)^2} = 8,9 \cdot 10^{10}.$$

Etter dette regnestykket skulle det finnes ca. 100 milliarder stjerner i Melkeveien nærmere sentrum enn vi befinner oss. Siden tettheten av stjerner er størst inn mot sentrum, vil dette trolig være en nokså stor andel av det totale antallet i hele galaksen.

Denne metoden til å måle massen av Melkeveien ville ha vært helt korrekt dersom massefordelingen i Melkeveien var fullstendig kulesymmetrisk. Da ville gravitasjonen fra Melkeveien virke på solsystemet som om massen M innenfor en radius på 26 000 lysår var samlet i sentrum, og dessuten ville gravitasjonskreftene fra massen som befinner seg mer enn 26 000 lysår fra sentrum, summeres opp til null. Denne forutsetningen holder som kjent ikke eksakt, massefordelingen er ikke kulesymmetrisk, men skiveformet. Spesielt impliserer skiveformen at den massen som er utenfor solsystemet, trekker utover, bort fra sentrum. Til gjengjeld vil massen som er innenfor, trekke mer innover enn om fordelingen var kulesymmetrisk.

Et spesialtilfelle av en kulesymmetrisk massefordeling i Melkeveien er dersom massen er sterkt konsentrert inn mot sentrum. At dette er en dårlig tilnærming, ser vi av rotasjonskurven til Melkeveien, dvs. hvordan rotasjonshastigheten til stjernene varierer med avstanden til sentrum. Hvis all massen lå nær sentrum, skulle rotasjonshastigheten lenger ute avta med avstanden til sentrum, omvendt proporsjonalt med kvadratroten av avstanden. Men det er ikke tilfelle, i stedet er rotasjonshastigheten omtrent konstant, uavhengig av avstanden.

2) Avstanden er

$$d = 4,39 \text{ lysår} = 4,39 \text{ lysår} \frac{1 \text{ parsec}}{3,26 \text{ lysår}} = 1,347 \text{ parsec} .$$

Parallaksen er

$$\alpha = 1 \text{ buesekund} \frac{1 \text{ parsec}}{d} = 1 \text{ buesekund} \frac{1}{1,347} = 0,743 \text{ buesekund} = 0,743'' .$$

Vi kan også bruke direkte definisjonen, at parallaksen er en astronomisk enhet dividert med avstanden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 \text{ AU}}{d} = \frac{1 \text{ AU}}{4,39 \text{ lysår}} = \frac{150 \cdot 10^6 \text{ km}}{4,39 \times 300\,000 \text{ km/s} \times 365,25 \times 24 \times 3600 \text{ s}} \\ &= \frac{150 \cdot 10^6 \text{ km}}{4,39 \times 9,47 \cdot 10^{12} \text{ km}} = 3,61 \cdot 10^{-6} . \end{aligned}$$

Dette er parallaksen i radianer. Nå er π radianer lik 180 grader, slik at

$$3,61 \cdot 10^{-6} = 3,61 \cdot 10^{-6} \frac{180 \times 3600''}{\pi} = 3,61 \cdot 10^{-6} \times 206\,265'' = 0,744'' .$$

Den absolutte størrelsesklassen er størrelsesklassen omregnet til en standard avstand av 10 lysår. Når størrelsesklassen er m for en stjerne i avstanden d , er den absolutte størrelsesklassen gitt som

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ parsec}} \right) .$$

Hvordan kommer vi fram til denne formelen? For det første: størrelsesklassen m varierer lineært med logaritmen av den tilsynelatende lysstyrken («brightness» på engelsk). For det andre: en faktor på 10 i avstanden utgjør en faktor på 100 (eller rettere 1/100) i lysstyrken, som pr. definisjon tilsvarer en forskjell på 5 størrelsesklasser; det bestemmer faktoren 5 i formelen

når vi bruker logaritmen med basis 10. For det tredje: hvis avstanden d f.eks. er større enn 10 parsec, så ser stjernen lyssvakere ut enn om den var i standardavstanden 10 parsec, og da er den observerte størrelsesklassen m større enn den absolutte størrelsesklassen M , det bestemmer fortegnet – i formelen.

Størrelsen $\mu = m - M$ kalles avstandsmodulus, den er et mål for avstanden d ,

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ parsec}} \right) .$$

Når $d = 1,347$ parsec, så er

$$\mu = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ parsec}} \right) = 5 \log_{10} 0,1347 = -4,35 .$$

De absolutte størrelsesklassene for de to stjernene er derfor

$$M = m - \mu = -0,01 - (-4,35) = 4,34 \quad \text{og} \quad M = m - \mu = 1,33 - (-4,35) = 5,68 .$$

Den første har større luminositet enn Sola (som har absolutt størrelsesklasse 4,8), og faktoren er

$$100^{(4,8-4,34)/5} = 100^{0,092} = 10^{0,184} = 1,53 .$$

Den andre har mindre luminositet enn Sola, og faktoren er

$$100^{(4,8-5,68)/5} = 100^{-0,176} = 10^{-0,352} = 0,44 .$$

Så var det formelen for vinkeloppløsningen $\Delta\theta$ til et teleskop med lysåpning (som regel speil-diameter) D ,

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{206\,265'' \lambda}{1 \text{ radian } D} = 250\,000'' \frac{\lambda}{D} .$$

Vinkler kan vi regne i radianer eller buesekunder, etter hva som er mest hensiktsmessig. Faktoren 1,22 kunne vi like gjerne sette lik 1. Her er $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m bølglengden av lyset.

En grei huskeregel er at et teleskop med vinkeloppløsning $1''$, som er omtrent den grensen som settes av turbulensen i atmosfæren, har en diameter D som er 250 000 ganger bølglengden av lyset,

$$D = 250\,000 \lambda = 12,5 \text{ cm} .$$

Eller 10 cm, siden vi regner bare omtrentlig uansett. Den viktigste grunnen til å ønske seg et teleskop med større lysåpning enn 10 cm, er altså at en kan se mer lyssvake objekter.

Synsvinkelen β mellom de to stjernene er (omtrent) lik avstanden mellom dem, 24 AU, dividert med avstanden $d = 1 \text{ AU}/\alpha$, der α er parallaksen. Altså,

$$\beta = \frac{24 \text{ AU}}{d} = \frac{24 \text{ AU } \alpha}{1 \text{ AU}} = 24 \alpha = 24 \times 3,61 \cdot 10^{-6} = 8,7 \cdot 10^{-5} = 8,7 \cdot 10^{-5} \frac{206\,265''}{1 \text{ radian}} = 17,9'' .$$

For å kunne se de to stjernene hver for seg, må en ha et teleskop med vinkeloppløsning $\Delta\theta$ mindre enn vinkelen β , altså med lysåpning

$$D > \frac{1,22 \lambda}{\beta} = \frac{1,22 \lambda}{8,7 \cdot 10^{-5}} = 14\,000 \lambda = 14\,000 \times 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 7,0 \text{ mm} .$$

Siden pupillen i øyet måler kanskje 5 mm i mørket, betyr det at de to stjernene nesten kan skjernes uten teleskop, med bare øyet.

3) Lyset fra HII emisjonståker (Orion-tåken) består av enkelte spektrallinjer, og det er gjerne rødt, fordi det synlige lyset domineres av spektrallinjen H_{α} , som kommer fra overgangen fra 2. eksiterte tilstand ($n = 3$) til 1. eksiterte tilstand ($n = 2$) i hydrogenatomet.

Lyset fra refleksjonståker (som omgir Pleiadene) er reflektert stjernelys, og har derfor et kontinuerlig spektrum med absorpsjonslinjer. Det er gjerne blått, fordi korte bølgelengder (blått lys) reflekteres mer effektivt enn lange bølgelengder (rødt lys). Det skyldes at atomene og støvpartiklene som sprer lyset, er mindre enn bølgelengden av lyset. Spredning av bølger mot en hindring (f.eks. vannbølger mot en stak som står opp av vannet) er mest effektiv når bølgelengden er sammenlignbar med, eller mindre enn, den hindringen som bølgene spres mot.

En annen grunn til at refleksjonståker ser blå ut, kan være at de stjernene som lyser dem opp, ofte er blå kjempestjerner.

4) Vekten av den loddrette luftsøylen over 1 m^2 av jordoverflaten er 10^5 N . Vekten er mg , der m er massen og $g = 9,8 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon. Massen av denne luftsøylen er altså 10^4 kg . Jordradien er $R = 6378 \text{ km}$, og det totale arealet av jordoverflaten er

$$4\pi R^2 = 5,112 \cdot 10^8 \text{ km}^2 = 5,112 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 .$$

Massen av jordatmosfæren blir da $5,11 \cdot 10^{18} \text{ kg}$.

Sammenlignet med hele jordmassen på $5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ blir det en andel på $8,56 \cdot 10^{-7} \approx 10^{-6}$.

5) For en ideal gass ved konstant temperatur T er trykket P proporsjonalt med tettheten ρ ,

$$P = \frac{\rho k_B T}{\bar{m}} .$$

Ligningen for hydrostatisk likevekt gir da at

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{\bar{m} P g}{k_B T} = -\alpha P ,$$

der α er konstant når temperaturen er konstant,

$$\alpha = \frac{\bar{m} g}{k_B T} .$$

Dette er en separabel differensialligning, vi kan skrive den som

$$\frac{dP}{P} = -\alpha dz ,$$

da kan den integreres direkte, og løsningen er

$$\ln P - \ln P_0 = -\alpha(z - z_0) ,$$

der P_0 og z_0 er integrasjonskonstanter. For en førsteordens ligning som denne skal vi som kjent ha en integrasjonskonstant, ikke to, og det er nettopp det vi har, men den ene konstanten velger vi å skrive som $\ln P_0 + \alpha z_0$. Eksponensiering gir at

$$P = P_0 e^{-\alpha(z-z_0)} .$$

Luft består av rundt regnet 80 % nitrogen (N_2 , massetall $2 \times 14 = 28$) og 20 % oksygen (O_2 , massetall $2 \times 16 = 32$). Gjennomsnittlig masse for et luftmolekyl er følgelig (omtrentlig regnet, der $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg er atommasseenheten, praktisk talt identisk med protonmassen m_p)

$$\bar{m} = (0,8 \times 28 + 0,2 \times 32) u = 28,8 u = 28,8 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg} .$$

Den numeriske verdien for konstanten α , hvis vi setter temperaturen (litt tilfeldig) lik 283 K, altså 10 grader Celsius, blir

$$\alpha = \frac{\bar{m} g}{k_B T} = \frac{4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ (J/K)} \times 283 \text{ K}} = 1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m} .$$

Hvis vi velger z_0 som havnivået, så er altså $P_0 = 1$ atmosfære. For Galdhøpiggen har vi at $z - z_0 = 2469$ m, og trykket der er

$$P = P_0 e^{-(1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m}) 2469 \text{ m}} = P_0 e^{-0,2963} = 0,744 P_0 .$$

Tilsvarende for de to andre fjelltoppene,

$$P = P_0 e^{-(1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m}) 4807 \text{ m}} = P_0 e^{-0,5768} = 0,562 P_0 ,$$

og

$$P = P_0 e^{-(1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m}) 8848 \text{ m}} = P_0 e^{-1,0618} = 0,346 P_0 .$$

6) For atmosfæren til Mars bruker vi den samme formelen som for jordatmosfæren,

$$P = P_0 e^{-\alpha(z-z_0)} .$$

Men konstanten

$$\alpha = \frac{\bar{m} g}{k_B T}$$

har nå en litt annen numerisk verdi. Atmosfæren til Mars inneholder 95 % CO_2 , så vi regner som om den besto av bare CO_2 . Molekylvekten av CO_2 er $12 + 2 \times 16 = 44$, slik at gjennomsnittsmassen av et molekyl er

$$\bar{m} = 44 u = 44 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 7,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg} .$$

Tyngdens akselerasjon er $g = 3,8 \text{ m/s}^2$ (sammenlignet med Jorda er massen 0,107 og radien 0,533, slik at tyngdens akselerasjon på Mars sammenlignet med på Jorda blir $0,107/0,533^2 = 0,38$). Temperaturen varierer mye mellom dag og natt, bruker vi middeltemperaturen $T = 220$ K, får vi at

$$\alpha = \frac{\bar{m} g}{k_B T} = \frac{7,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \times 3,8 \text{ m/s}^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ (J/K)} \times 220 \text{ K}} = 9,1 \cdot 10^{-5} / \text{m} .$$

Med en høydeforskjell på $z - z_0 = 31$ km finner vi da at

$$P = P_0 e^{-(9,1 \cdot 10^{-5} / \text{m}) 31000 \text{ m}} = P_0 e^{-2,82} = 0,060 P_0 .$$

Trykket på toppen av Olympus Mons er 6 % av trykket i det laveste punktet på Mars.

7) Selv om det blåser kraftig, vil trykket utlignes praktisk talt fullstendig, slik at betingelsen for hydrostatisk likevekt vil gjelde som en god tilnærming,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g .$$

Luft som beveger seg fra Dovre ned mot Trondheim vil trykkes sammen, fordi lufttrykket øker nedover. Hvis sammentrykningen skjer adiabatisk, er altså $P = K\rho^\gamma$, der K er en konstant. Det vil si at

$$\frac{dP}{dz} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dz} .$$

Disse to ligningene tilsammen gir at

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho g}{\gamma K \rho^{\gamma-1}} = -\frac{g}{\gamma K \rho^{\gamma-2}} .$$

Som vi omskriver til

$$\gamma K \rho^{\gamma-2} d\rho = -g dz .$$

Integrasjon gir så at

$$\frac{\gamma K \rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = -g(z - z_0) ,$$

der z_0 er en integrasjonskonstant. Vi setter inn først $K\rho^\gamma = P$, det gir at

$$\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho} = -g(z - z_0) .$$

Deretter setter vi inn $P/\rho = k_B T/\bar{m}$, det gir at

$$\frac{\gamma k_B T}{(\gamma-1)\bar{m}} = -g(z - z_0) ,$$

eller ekvivalent,

$$T = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{m}g(z - z_0)}{k_B} = -\frac{2}{7} \frac{4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg } 9,8 \text{ m/s}^2 (z - z_0)}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} = -(9,7 \cdot 10^{-3} \text{ K/m})(z - z_0) .$$

Hvis temperaturen ved $z = z_1 = 1100 \text{ m}$ er T_1 , og temperaturen ved $z = z_2 = 100 \text{ m}$ er T_2 , så er temperaturdifferensen

$$T_2 - T_1 = -(9,7 \cdot 10^{-3} \text{ K/m})(z_2 - z_1) = -(9,7 \cdot 10^{-3} \text{ K/m})(-1000 \text{ m}) = 9,7 \text{ K} .$$

Hvis alle opp- og nedgående luftstrømmer i atmosfæren var adiabatisk, så skulle, i følge vårt lille regnestykke, temperaturen avta med en grad for hver 100 meter over havet. Men det er flere effekter som gjør at den virkelige temperaturgradienten blir mindre (dvs. mindre i absoluttverdi) enn en grad for hver 100 meter.

Noen ganger ligger kanskje lufta stille, slik at temperaturen utjevnes. En stille vinterdag kan vi til og med få temperaturinversjon, det vil si at det ligger et varmt luftlag over et kaldt luftlag ved bakken.

Et annet viktig poeng er at luft inneholder vanndamp, og det finnes et metningspunkt for vanndampinnholdet, som avhenger av trykk og temperatur. Når luft mettet på vanndamp stiger opp og avkjøles, kondenseres noe av vanndampen, og i den prosessen frigjøres varme

slik at lufta avkjøles mindre enn den ellers ville gjøre.

Vårt regnestykke forteller forresten også at den kritiske temperaturgradienten for konveksjon i atmosfæren (i tørr luft) er ca. en grad for hver 100 meter. Det vil ikke foregå konveksjon når temperaturgradienten er mindre enn det. Men det trengs ikke særlig mye oppvarming ved bakken en sommerdag med sol, før temperaturgradienten blir større enn den kritiske verdien, slik at varm luft kan stige fra bakken og flere kilometer opp, og det oppstår cumulus-skyer.

8a) Gravitasjonspotensialet ϕ er en funksjon av fire variable x, y, z, t , men vi antar her at det avhenger av x, y, z bare gjennom radien $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi skriver da $\phi = \phi(x, y, z, t) = \phi(r, t)$. La oss presisere hva vi mener med denne notasjonen. I et punkt (x, y, z) i rommet ved tiden t har gravitasjonspotensialet en bestemt verdi ϕ , og denne verdien avhenger bare av r . For å unngå forvirring når vi deriverer, burde vi kanskje heller skrive $\phi(x, y, z, t) = f(r, t)$. Da ser vi altså på ϕ som en funksjon av fire variable x, y, z, t , mens vi ser på f som en funksjon av to variable r, t . Matematisk sett er ϕ og f to forskjellige funksjoner, de har til og med forskjellig antall argumenter, men funksjonsverdien av ϕ i (x, y, z, t) er lik funksjonsverdien av f i (r, t) .

Derivasjon gir at

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}.$$

Og tilsvarende for derivasjon med hensyn på y og z . Da blir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x}{r}$$

Når vi partiellderiverer, gjelder det å holde rede på hvilke variable som varieres og hvilke som holdes konstante. Vi kan partiellderivere $\phi(x, y, z, t)$ eller $f(r, t) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t)$ med hensyn på x , da er det x som varieres, mens y, z, t holdes konstante. Vi kan ikke partiellderivere $\phi(x, y, z, t)$ med hensyn på r , men vi kan partiellderivere $f(r, t)$ med hensyn på r , da varierer vi r og holder t konstant.

Videre blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Og tilsvarende for derivasjon med hensyn på y og z . Dermed får vi at

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Til slutt forenkler vi notasjonen ved at vi skriver den samme formelen slik:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

8b) Vi skal løse ligningen

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = C$$

der C er konstant, enten $C = 4\pi G\rho_0$, for $0 < r < R$, eller $C = 0$, for $r > R$. Integrasjon en gang gir at

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = \frac{Cr^3}{3} + A,$$

der A er en integrasjonskonstant, som kan ha forskjellig verdi i de to intervallene $0 < r < R$ og $r > R$. Integrasjon en gang til gir at

$$\phi = \frac{Cr^2}{6} - \frac{A}{r} + B,$$

der B er en ny integrasjonskonstant, som også kan ha forskjellig verdi i de to intervallene $0 < r < R$ og $r > R$. For $0 < r < R$ har vi altså

$$\phi = \frac{2\pi G\rho_0 r^2}{3} - \frac{A_1}{r} + B_1,$$

og for $r > R$ har vi

$$\phi = -\frac{A_2}{r} + B_2,$$

med tilsammen fire integrasjonskonstanter A_1, B_1, A_2, B_2 . Vi krever at $\phi \rightarrow 0$ når $r \rightarrow \infty$, det gir at $B_2 = 0$. Vi krever også at ϕ ikke skal være singulær (ved at $\phi \rightarrow \pm\infty$) når $r \rightarrow 0$, det gir at $A_1 = 0$.

Et interessant spørsmål er hva som skjer i punktet $r = R$, der høyresiden i differensialligningen vår, $4\pi G\rho(r)$, er diskontinuerlig. For å forstå hva som skjer, kan vi tenke oss at vi glatter ut diskontinuiteten, at vi altså lar tettheten $\rho(r)$ gå kontinuerlig fra verdien ρ_0 til verdien 0 over et lite intervall $R - \epsilon < r < R + \epsilon$, der ϵ er liten og positiv. Så integrerer vi ligningen

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho(r) r^2$$

fra $r = R - \epsilon$ til $r = R + \epsilon$, det gir at

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} \Big|_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} = \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} dr' 4\pi G\rho(r') (r')^2.$$

Diskontinuiteten av $\rho(r)$ oppstår i grensen $\epsilon \rightarrow 0$. I denne grensen vil integralet på høyre side i den siste ligningen gå mot null, og det betyr at den deriverte $\phi' = d\phi/dr$ er kontinuerlig i $r = R$. Siden funksjonen ϕ har en kontinuerlig derivert ϕ' , er den selv kontinuerlig. Konklusjon: vi oppfylder differensialligningen i punktet $r = R$ ved at vi krever at både $\phi(r)$ og $\phi'(r)$ skal være kontinuerlige der.

Kontinuitetskravet for ϕ i $r = R$ betyr at

$$\frac{2\pi G\rho_0 R^2}{3} + B_1 = -\frac{A_2}{R},$$

Kontinuitetskravet for ϕ' i $r = R$ betyr at

$$\frac{4\pi G\rho_0 R}{3} = \frac{A_2}{R^2}.$$

Alt i alt får vi den entydige løsningen

$$\phi = \frac{2\pi G\rho_0(r^2 - 3R^2)}{3} \quad \text{for } 0 < r < R,$$

$$\phi = -\frac{4\pi G\rho_0 R^3}{3r} \quad \text{for } r > R.$$

8c) Vi har at $g = |\vec{g}| = |\nabla\phi| = |\phi'|$. Tyngdens akselerasjon inne i planeten, for $0 < r < R$, er

$$g = \frac{4\pi G\rho_0 r}{3} = \frac{GM_r(r)}{r^2}.$$

Og tyngdens akselerasjon utenfor planeten, for $r > R$, er

$$g = \frac{4\pi G\rho_0 R^3}{3r^2} = \frac{GM}{r^2}.$$

8d) Hvis

$$\phi = \phi_0 + A \ln\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

så er

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\phi_0 - \phi}{K}} = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{A}{K}}.$$

Dessuten er

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r}, \quad \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2},$$

og

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2}.$$

Poissons ligning $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ ser dermed slik ut:

$$\frac{A}{r^2} = 4\pi G\rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{A}{K}}.$$

For at begge sidene av ligningen skal variere med r på samme måte, er det nødvendig at $A = 2K$. Poissons ligning reduseres da til ligningen

$$2K = 4\pi G\rho_0 r_0^2.$$

Tettheten blir

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = \frac{K}{2\pi G r^2}.$$

Denne løsningen er u fysisk på den måten at tettheten er singulær i origo, $\rho \rightarrow \infty$ når $r \rightarrow 0$. På den andre siden er ikke tettheten mer singulær enn at massen innenfor en gitt radius r er endelig, og går mot null når $r \rightarrow 0$,

$$M_r(r) = \int_0^r dr' 4\pi(r')^2 \rho(r') = \int_0^r dr' \frac{2K}{G} = \frac{2Kr}{G}.$$

Løsningen er kanskje ikke helt urealistisk likevel, som en beskrivelse av en gasståke med konstant temperatur og med en tetthet som øker innover mot sentrum.

Det finnes naturligvis andre kulesymmetriske løsninger av ligningen $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho_0 e^{\frac{\phi_0 - \phi}{K}}$. For eksempel kan vi rekkeutvikle omkring $r = 0$ og finne løsninger der tettheten i sentrum er endelig.

8e) Massen er

$$M = \frac{R^2 g(R)}{G} = -\frac{(\xi_1 r_0)^2 (\nu + 1) P_c}{G \rho_c r_0} \Theta'(\xi_1) = \frac{r_0 (\nu + 1) P_c}{G \rho_c} (-\xi_1^2 \Theta'(\xi_1)) .$$

I følge definisjonen av r_0 er da

$$M = 4\pi \rho_c r_0^3 (-\xi_1^2 \Theta'(\xi_1)) .$$

8f) De to ligningene (33) og (35) i oppgaveteksten gir at

$$M = a_1 \frac{4\pi}{3} \rho_c R^3 ,$$

der

$$a_1 = \frac{(-3\xi_1^2 \Theta'(\xi_1))}{\xi_1^3} = \frac{3 \times 2,714}{3,654^3} = 0,166925 = \frac{1}{5,99070} .$$

Sola har en midlere tetthet $\bar{\rho}$ som er 1,4 ganger tettheten av vann,

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 1390 \text{ kg/m}^3 .$$

I følge Lane–Emden-ligningen, med polytropindeks $\nu = 3/2$, skulle sentraltettheten være

$$\rho_c = \frac{1}{a_1} \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{\bar{\rho}}{a_1} = 8400 \text{ kg/m}^3 ,$$

altså $1/a_1 = 6$ (mer nøyaktig 5,99) ganger den midlere tettheten. Det må nærmest kalles skivebom, siden fasitsvaret for sentraltettheten, $152\,700 \text{ kg/m}^3$, er 19 ganger større, og mer enn hundre ganger den midlere tettheten.

Sentraltrykket er, i følge Lane–Emden-ligningen,

$$P_c = \frac{8\pi G R^2}{5\xi_1^2} \rho_c^2 = \frac{8\pi G R^2}{5\xi_1^2} \frac{1}{a_1^2} \frac{9M^2}{16\pi^2 R^6} = a_2 \frac{GM^2}{R^4} = 8,56 \cdot 10^{14} \text{ N/m}^2 ,$$

der

$$a_2 = \frac{9}{10\pi \xi_1^2 a_1^2} = 0,77014 .$$

Det sentraltrykket vi nettopp har regnet ut, er 26 ganger for lite, altså en ny skivebom. Sentraltrykket har forøvrig en viss sammenheng med den totale gravitasjonsenergien. La oss sammenligne med gravitasjonsenergien for en kule med konstant tetthet, som er

$$W = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} .$$

Hvis vi multipliserer sentraltrykket vi har regnet ut, med volumet $\mathcal{V} = 4\pi R^3/3$, får vi at

$$P_c \mathcal{V} = \frac{6}{5\xi_1^2 a_1^2} \frac{GM^2}{R} = a_3 W ,$$

der

$$a_3 = \frac{2}{\xi_1^2 a_1^2} = 5,3766 .$$

8g) Når vi bruker tilstandsligningen for en ideal gass, finner vi sentraltemperaturen

$$T_c = \frac{P_c}{\rho_c} \frac{\bar{m}}{k_B} .$$

Vi må bare finne den riktige verdien å sette inn for den midlere partikkelmassen \bar{m} .

La m_e , m_p og $m_\alpha = 4m_p$ være massene av henholdsvis et elektron, et proton og en α -partikkel (en α -partikkel er det samme som en heliumkjerne). Hvis vi har gitt et gassvolum med N partikler og total masse m , så er den midlere partikkelmassen definert som

$$\bar{m} = \frac{m}{N} .$$

Siden 34 % av massen er hydrogen, så er antallet protoner i gassvolumet gitt som

$$N_p = \frac{0,34 m}{m_p} .$$

Husk at elektronmassen er neglisjerbar sammenlignet med massen til en atomkjerne. 64 % av massen er helium, og antallet α -partikler er

$$N_\alpha = \frac{0,64 m}{m_\alpha} = \frac{0,16 m}{m_p} .$$

Da har vi gjort rede for 98 % av massen. De siste to prosentene er atomkjerner av diverse grunnstoffer, trolig mest karbon. Hvis vi sier karbonkjerner, med masse $m_C = 12m_p$, så er antallet av dem nokså neglisjerbart,

$$N_C = \frac{0,02 m}{12m_p} .$$

Antallet elektroner er nå

$$N_e = N_p + 2N_\alpha + 6N_C = \frac{(0,34 + 0,32 + 0,01)m}{m_p} = \frac{0,67m}{m_p} ,$$

og det totale antallet partikler er

$$N = N_p + N_\alpha + N_C + N_e = \frac{(0,34 + 0,16 + 0,0017 + 0,67)m}{m_p} = \frac{1,17m}{m_p} .$$

Altså er

$$\bar{m} = \frac{m}{N} = \frac{m_p}{1,17} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,17} = 1,43 \cdot 10^{-27} \text{ kg} .$$

Sentraltemperaturen blir da

$$T_c = \frac{P_c}{\rho_c} \frac{\bar{m}}{k_B} = \frac{2,342 \cdot 10^{16} \text{ N/m}^2 \times 1,43 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,527 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} = 1,59 \cdot 10^7 \text{ K} .$$

Fasitsvaret, fra den nevnte solmodellen, er $1,57 \cdot 10^7 \text{ K}$.