NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53 (mobil 90 07 51 72)

Eksamen i fag FY3403 Partikkelfysikk
Onsdag 10. desember 2008
Tid: 09.00–13.00

Sensurfrist: Onsdag 31. desember 2008

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske tabeller.

Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

I et eksperiment skyter vi protoner mot protoner eller nøytroner som ligger i ro.

a) Hvis vi ser bort fra at $\Delta^+(1232)$ er en ganske bred resonans, hvor stor impuls og energi må protonene minst ha for at reaksjonen $p + p \to p + \Delta^+$ skal være mulig?

b) Hva er forholdet mellom tverrsnittene for de to reaksjonene

$$p + p \to p + \Delta^+ \qquad \text{og} \qquad p + p \to n + \Delta^{++} \ ?$$

Tabell over Clebsch–Gordan-koeffisienter er vedlagt.

c) Hva er forholdet mellom tverrsnittene for de to reaksjonene

$$p + p \to p + \Delta^+ \qquad \text{og} \qquad p + n \to n + \Delta^+ \ ?$$

d) Hva er forholdet mellom følgende to tverrsnitt for produksjon av π-mesoner,

$$p + p \to p + p + \pi^0 \qquad \text{og} \qquad p + p \to p + n + \pi^+ \ ,$$

dersom hver reaksjon skjer via en mellomtilstand med en Δ-resonans? Altså:

$$\begin{aligned} p + p &\to p + \Delta^+ \ \ \to p + p + \pi^0 \ , \\ p + p &\to p + \Delta^+ \ \ \to p + n + \pi^+ \ , \\ p + p &\to n + \Delta^{++} \to n + p + \pi^+ \ . \end{aligned}$$

Oppgave 2:

a) Hvilken (eller hvilke) av de følgende reaksjonene har størst tverrsnitt, og hvor store er de andre tverrsnittene i forhold til det største?

$$
\begin{aligned}
K^- + d &\to \Lambda^0 + \Delta^0 \ , \\
K^- + d &\to \Sigma^0 + \Delta^0 \ , \\
K^- + d &\to \Sigma^- + \Delta^+ \ , \\
K^- + d &\to \Sigma^+ + \Delta^- \ , \\
K^+ + d &\to \Sigma^0 + \Delta^+ \ , \\
K^+ + d &\to \Sigma^0 + \Delta^{++} \ .
\end{aligned}
$$

Hvis du mener at noen av reaksjonene ikke er mulige, forklar hvorfor.

b) $\Lambda^0(1116)$ desintegrerer $63,9\,\%$ til $p + \pi^-$ og $35,8\,\%$ til $n + \pi^0$. Den midlere levetiden er $2,6 \times 10^{-10}$ s.

Skjer det ved sterk, elektromagnetisk eller svak vekselvirkning? Begrunn svaret.

Er forgreningsforholdet konsistent med den omtrentlige utvalgsregelen for isospinn, at $\Delta I = 1/2$?

c) $\Sigma^-(1197)$ desintegrerer $99,8\,\%$ til $n + \pi^-$, med en levetid på $1,5 \times 10^{-10}$ s. Hva er isospinnet i slutt-tilstanden?

$\Sigma^+(1189)$ desintegrerer $51,6\,\%$ til $p + \pi^0$ og $48,3\,\%$ til $n + \pi^+$, med en levetid på $8,0 \times 10^{-11}$ s. Er det mulig å si noe om isospinnet i slutt-tilstanden?

$\Sigma^0(1193)$ desintegrerer $100\,\%$ til $\Lambda^0 + \gamma$, med en midlere levetid på $7,4 \times 10^{-20}$ s.

Hvorfor observeres ikke, for eksempel, $\Sigma^0 \to p + \pi^-$ eller $\Sigma^0 \to n + \pi^0$?

d) Ved en semileptonisk desintegrasjon av et hadron (en partikkel med sterk vekselvirkning) inneholder slutt-tilstanden både hadroner og leptoner.

Σ^- har tre semileptoniske desintegrasjonsmoder, nemlig $n + e^- + \overline{\nu}_e$ (0,10 %), $n + \mu^- + \overline{\nu}_\mu$ (0,045 %) og $\Lambda^0 + e^- + \overline{\nu}_e$ (0,0057 %).

For Σ^+ observeres ikke de tilsvarende semileptoniske desintegrasjonsmodene $n + e^+ + \nu_e$ og $n + \mu^+ + \nu_\mu$, men $\Lambda^0 + e^+ + \nu_e$ observeres (0,0020 %).

Disse eksemplene demonstrerer utvalgsregelen $\Delta S = \Delta Q$ for semileptonisk desintegrasjon der særtallet forandres. Da ser vi bort fra leptonene og observerer forandringen i særtall, ΔS, og forandringen i elektrisk ladning, ΔQ, for hadronene.

Forklar, gjerne ved hjelp av Feynman-diagram, hvordan utvalgsregelen $\Delta S = \Delta Q$ har en naturlig forklaring i kvarkmodellen.

Oppgave 3:

Nøytrinooscillasjoner ligner mye på oscillasjoner mellom K^0 og $\overline{K}^0$, som ble observert eksperimentelt for mer enn 40 år siden. En vesentlig forskjell er at nøytrinoene er absolutt stabile partikler (så vidt vi vet), mens K_L^0 (den langlivede K^0) har en midlere levetid på $\tau_L = 1/\Gamma_L = 5,1 \times 10^{-8}$ s, og K_S^0 (den kortlivede K^0) har en midlere levetid på $\tau_S = 1/\Gamma_S = 9,0 \times 10^{-11}$ s.

Anta at en K^0 eller $\overline{K}^0$ ligger i ro. Analysen forenkles mye om vi antar at CP-symmetrien er eksakt. I denne tilnærmingen (som er mindre enn en prosent feil) er K_L og K_S egentilstander for CP,

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= |K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle \right) , \\ |K_L\rangle &= |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle \right) . \end{aligned}$$

Forskjellen i levetid skyldes at K_1 har $CP = +1$ og kan desintegrere til to π-mesoner uten å bryte CP-invarians, mens K_2 har $CP = -1$ og må desintegrere til tre π-mesoner dersom CP er en eksakt symmetri.

Anta at partikkelen produseres ved $t = 0$ med bestemt særtall $S = +1$, altså i tilstanden

$$|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle \right) .$$

Ved en senere tid t har vi da tilstanden

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-\left(im_S + \frac{\Gamma_S}{2}\right)t} \, |K_1^0\rangle + e^{-\left(im_L + \frac{\Gamma_L}{2}\right)t} \, |K_2^0\rangle \right) .$$

Her er m_S og m_L massene til K_S og K_L. Vi bruker naturlige enheter med $\hbar = 1$ og $c = 1$.

a) Skriv tilstanden $|\psi(t)\rangle$ som en lineærkombinasjon av $|K^0\rangle$ og $|\overline{K}^0\rangle)$.

Hvis vi observerer partikkelen ved tiden t, enten som en K^0 eller som en $\overline{K}^0$, hva er da sannsynligheten for K^0, og hva er sannsynligheten for $\overline{K}^0$?

Hva er grenseverdiene for disse sannsynlighetene når $t \to \infty$?

b) Forutsatt at utvalgsregelen $\Delta S = \Delta Q$ gjelder, så kan vi identifisere partikkelen som K^0 eller $\overline{K}^0$ dersom den desintegrerer semileptonisk. De to prosessene $K^0 \to \pi^- + e^+ + \nu_e$ og $\overline{K}^0 \to \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e$ har nemlig $\Delta S = \Delta Q$ og er tillatte, mens $K^0 \to \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e$ og $\overline{K}^0 \to \pi^- + e^+ + \nu_e$ har $\Delta S = -\Delta Q$ og er forbudte.

Forutsatt at CP-invariansen er eksakt, så må ratene for $K^0 \to \pi^- + e^+ + \nu_e$ og $\overline{K}^0 \to \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e$ være like store. Men det vi observerer i vårt tankeeksperiment, er tidsavhengige desintegrasjonsrater

$$\Gamma_+(t) = \Gamma(\psi(t) \to \pi^- + e^+ + \nu_e) \qquad \text{og} \qquad \Gamma_-(t) = \Gamma(\psi(t) \to \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e) .$$

Vi skriver Γ_+ for raten til slutt-tilstanden med et positron, og Γ_- for raten til slutt-tilstanden med et elektron.

Ut fra disse ratene kan vi definere en tidsavhengig asymmetriparameter

$$\delta(t) = \frac{\Gamma_+(t) - \Gamma_-(t)}{\Gamma_+(t) + \Gamma_-(t)} \,.$$

Vi har at $\delta(t) = 1$ ved $t = 0$ når vi starter med K^0 ved $t = 0$. Vis at

$$\delta(t) = \frac{\cos(\Delta m\, t)}{\cosh(\gamma\, t)} \,,$$

der $\Delta m = m_L - m_S$ og $\gamma = (\Gamma_S - \Gamma_L)/2$. Merk at vi har forutsatt CP-invarians.

c) Figuren nedenfor er fra et eksperiment i CERN (Gjesdal et al., Physics Letters B52, 113 (1974)), og viser asymmetrien $\delta(t)$. Tidsaksen går fra 0 til 2,5 ns.

Bruk figuren til å anslå omtrentlige verdier for massedifferensen Δm og ratene γ og Γ_S.

Gir dette eksperimentet noen informasjon om fortegnet til Δm?

Hva blir forholdet $|\Delta m|/m_K$, der m_K er massen til et nøytralt K-meson?

Hvordan ser vi av figuren at CP-invariansen er brutt?

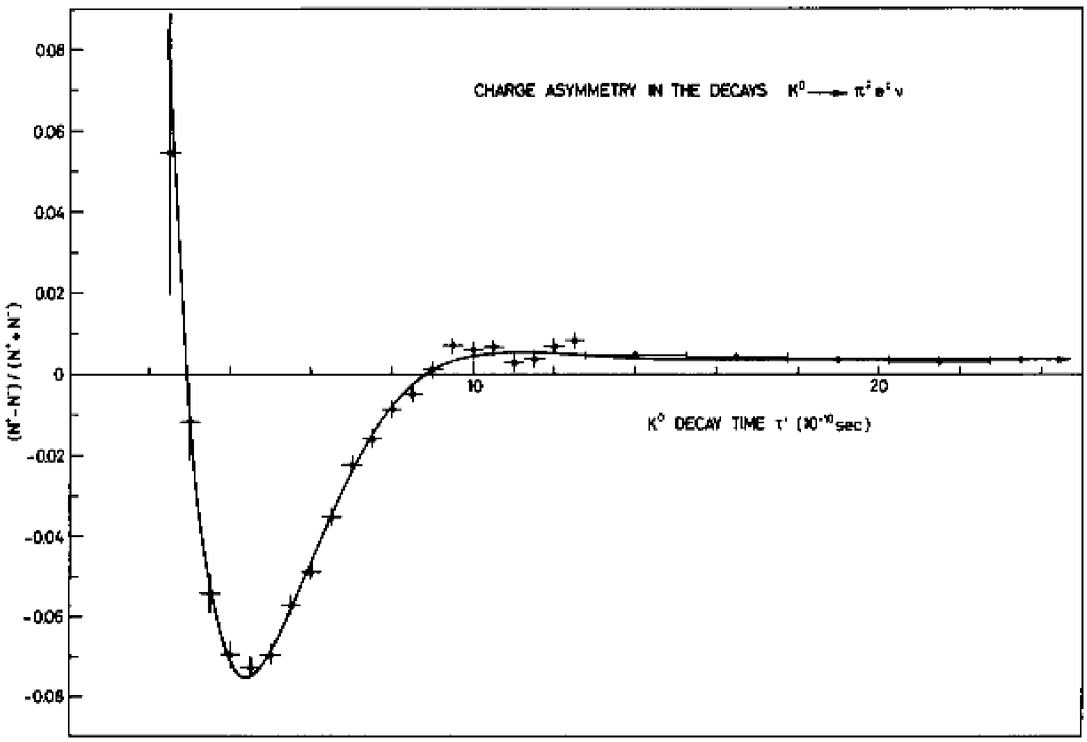

Fig. 1. The charge asymmetry as a function of the reconstructed decay time τ' for the K_{e3} decays. The experimental data are compared to the best fit as indicated by the solid line.

116

Noen nyttige konstanter:

Lyshastigheten i vakuum	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,854\,817\,187 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Den reduserte Plancks konstant	$\hbar = 1,054\,571\,6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
	$= 6,582\,119\,0 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$
Elementærladningen	$e = 1,602\,176\,5 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Elektronmassen	$m_\mathrm{e} = 9,109\,382 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,510\,998\,9\,\mathrm{MeV}/c^2$
Protonmassen	$m_\mathrm{p} = 1,672\,622 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938,272\,0\,\mathrm{MeV}/c^2$
Nøytronmassen	$m_\mathrm{n} = 1,674\,927 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939,565\,4\,\mathrm{MeV}/c^2$
Deuteronmassen	$m_\mathrm{d} = 3,343\,583 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1\,875,612\,8\,\mathrm{MeV}/c^2$

Partikkeldata:

m = masse i MeV/c^2, S = særtall,
I = isospinn, G = G-paritet, J = spinn, P = paritet,
C = ladningskonjugasjonssymmetri for en nøytral partikkel,

Mesoner	m	S	$I^G(J^{PC})$ eller $I(J^P)$	Mesoner	m	S	$I^G(J^{PC})$ eller $I(J^P)$
π^0	135,0		$1^-(0^{-+})$	$\pi^\pm$	139,6		$1^-(0^-)$
K^0	497,6	1	$\frac{1}{2}(0^-)$	K^+	493,7	1	$\frac{1}{2}(0^-)$
$\overline{K}^0$	497,6	-1	$\frac{1}{2}(0^-)$	K^-	493,7	-1	$\frac{1}{2}(0^-)$

Baryoner	m	S	$I(J^P)$	Baryoner	m	S	$I(J^P)$
p (proton)	938,3		$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	n (nøytron)	939,6		$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$
d (deuteron)	1875,6		$0(1^+)$	Δ	1232		$\frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)$
Λ^0	1115,7	-1	$0(\frac{1}{2}^+)$	Σ^0	1192,6	-1	$1(\frac{1}{2}^+)$
Σ^+	1189,4	-1	$1(\frac{1}{2}^+)$	Σ^-	1197,4	-1	$1(\frac{1}{2}^+)$

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND *d* FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
⋮	⋮			

1/2×1/2

m_1	m_2	1, +1
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	1, 0	0, 0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	1, −1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	3/2, +3/2
+1	+1/2	1

m_1	m_2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	3/2, −3/2
−1	−1/2	1

2×1/2

m_1	m_2	5/2, +5/2
+2	+1/2	1

m_1	m_2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	5/2, +1/2	3/2, +1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2, −1/2	3/2, −1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	5/2, −5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	2, +2
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	2, +1	1, +1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	2, 0	1, 0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, −1	1, −1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	2, −2
−3/2	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	3, +3
+2	+1	1

m_1	m_2	3, +2	2, +2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	3, +1	2, +1	1, +1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	3, 0	2, 0	1, 0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, −1	2, −1	1, −1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	3, −2	2, −2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	3, −3
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	2, +2
+1	+1	1

m_1	m_2	2, +1	1, +1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, 0	1, 0	0, 0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	2, −1	1, −1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	2, −2
−1	−1	1

3/2×1

m_1	m_2	5/2, +5/2
+3/2	+1	1

m_1	m_2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2, +1/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	5/2, −1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2, −5/2
−3/2	−1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

m_1	m_2	3, +3
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	3, +2	2, +2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3, +1	2, +1	1, +1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, 0	2, 0	1, 0	0, 0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	3, −1	2, −1	1, −1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3, −2	2, −2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3, −3
−3/2	−3/2	1

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

2×3/2

m_1	m_2	7/2, +7/2
+2	+3/2	1

m_1	m_2	7/2, +5/2	5/2, +5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	7/2, +3/2	5/2, +3/2	3/2, +3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	7/2, +1/2	5/2, +1/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	7/2, −1/2	5/2, −1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	7/2, −3/2	5/2, −3/2	3/2, −3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	7/2, −5/2	5/2, −5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	7/2, −7/2
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	4, +4
+2	+2	1

m_1	m_2	4, +3	3, +3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	4, +2	3, +2	2, +2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4, +1	3, +1	2, +1	1, +1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4, 0	3, 0	2, 0	1, 0	0, 0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	4, −1	3, −1	2, −1	1, −1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4, −2	3, −2	2, −2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4, −3	3, −3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	4, −4
−2	−2	1

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.