Eksamen FY3403 Partikkelfysikk
Onsdag 10. desember 2008
Løsninger

1a) Den minste massesenterenergien vi kan ha, er

$$E_{\text{CM}} = (m_{\text{p}} + m_\Delta)c^2 = (938 + 1232)\ \text{MeV} = 2170\ \text{MeV}\ .$$

Det er ikke noe poeng i å regne mer nøyaktig her, siden Δ-resonansen har en bredde på 118 MeV/c^2.

Vi har to protoner, nummerert f.eks. som a og b. Når $E = E_a + E_b$ er total energi og $\vec{P} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$ er total impuls, så er

$$s = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{P}|^2$$

en relativistisk invariant. I massesentersystemet er $\vec{P} = 0$, pr. definisjon, og

$$s = \frac{E_{\text{CM}}^2}{c^2}\ .$$

I laboratoriesystemet i start-tilstanden er $\vec{p}_b = 0$, pr. definisjon, og

$$\begin{aligned} s &= \frac{(E_a + m_b c^2)^2}{c^2} - |\vec{p}_a|^2 = m_b^2 c^2 + 2E_a m_b + \frac{E_a^2}{c^2} - |\vec{p}_a|^2 \\ &= m_b^2 c^2 + 2E_a m_b + m_a^2 c^2 = 2m_{\text{p}}(m_{\text{p}} c^2 + E_a)\ . \end{aligned}$$

Energien til det akselererte protonet er da

$$E_a = \frac{s}{2m_{\text{p}}} - m_{\text{p}} c^2 = \frac{E_{\text{CM}}^2}{2m_{\text{p}} c^2} - m_{\text{p}} c^2 = \left(\frac{2170^2}{2 \times 938} - 938\right)\ \text{MeV} = 1572\ \text{MeV}\ .$$

Den tilsvarende impulsen er

$$p_a = |\vec{p}_a| = \sqrt{\frac{E_a^2}{c^2} - m_{\text{p}}^2 c^2} = \sqrt{1572^2 - 938^2}\ \text{MeV}/c = 1262\ \text{MeV}/c\ .$$

1b) Proton og nøytron har isospinn $I = 1/2$ og Δ har isospinn $I = 3/2$. Start-tilstanden $a + b = p + p$ har nødvendigvis isospinn $I = 1$ med tredjekomponent $I_3 = 1$, den er

$$|i\rangle = |p, p\rangle = |I = 1, I_3 = 1\rangle\ .$$

Partiklene i slutt-tilstanden $c + d$ har isospinn $I_c = 1/2$ og $I_d = 3/2$, og det totale isospinnet kan bli enten $I = 1$ eller $I = 2$.

I tabellen over Clebsch–Gordan-koeffisienter finner vi ikke $I_c = 1/2$ og $I_d = 3/2$, men vi finner den motsatte rekkefølgen, $I_c = 3/2$ og $I_d = 1/2$. Det gjør samme nytten, i følge tabellen er koeffisientene de samme, med et ekstra fortegn $(-1)^{I-I_c-I_d} = (-1)^I$, som er ganske uvesentlig i denne sammenhengen, la oss ta det med bare som en prinsippsak.

Slutt-tilstanden er enten

$$|f\rangle = |p, \Delta^+\rangle = \left| I_{c3} = \frac{1}{2}, I_{d3} = \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}\, |I = 2, I_3 = 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}\, |I = 1, I_3 = 1\rangle$$

eller

$$|f\rangle = |n, \Delta^{++}\rangle = \left| I_{c3} = -\frac{1}{2}, I_{d3} = \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}\, |I = 2, I_3 = 1\rangle - \sqrt{\frac{3}{4}}\, |I = 1, I_3 = 1\rangle\ .$$

Isospinnet er bevart, og det betyr at spredningsamplituden fra en start-tilstand $|i\rangle = |I, I_3\rangle$ til en slutt-tilstand $|f\rangle = |I', I_3'\rangle$ avhenger bare av I, slik:

$$\mathcal{M} = \langle f|M|i\rangle = \langle I', I_3'|M|I, I_3\rangle = \mathcal{M}^{(I)}\, \delta_{I,I'}\, \delta_{I_3,I_3'}\ .$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p + p \to p + \Delta^+) &= \sqrt{\frac{1}{4}}\, \mathcal{M}^{(1)}\ , \\ \mathcal{M}(p + p \to n + \Delta^{++}) &= -\sqrt{\frac{3}{4}}\, \mathcal{M}^{(1)}\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Spredningstverrsnittet σ er proporsjonalt med $|\mathcal{M}|^2$, altså er

$$\frac{\sigma(p + p \to p + \Delta^+)}{\sigma(p + p \to n + \Delta^{++})} = \frac{1}{3}\ .$$

Dette forholdet gjelder både det differensielle tverrsnittet og det totale tverrsnittet (integrert over vinklene).

1c) I prosessen $p + n \to n + \Delta^+$ har vi start-tilstanden

$$|i\rangle = |p, n\rangle \ = \ \left| I_{a3} = \frac{1}{2}, I_{b3} = -\frac{1}{2} \right\rangle \ = \ \sqrt{\frac{1}{2}}\, |I = 1, I_3 = 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\, |I = 0, I_3 = 0\rangle$$

og slutt-tilstanden

$$|f\rangle = |n, \Delta^+\rangle = \left| I_{c3} = -\frac{1}{2}, I_{d3} = \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\, |I = 2, I_3 = 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\, |I = 1, I_3 = 0\rangle\ .$$

Det gir spredningsamplituden

$$\mathcal{M}(p + n \to n + \Delta^+) = -\sqrt{\frac{1}{4}}\, \mathcal{M}^{(1)}\ ,$$

og de to tverrsnittene er like,

$$\frac{\sigma(p + n \to n + \Delta^+)}{\sigma(p + p \to p + \Delta^+)} = 1\ .$$

Dette er et eksempel på såkalt ladningssymmetri, som er en svakere symmetri enn isospinnsymmetri: den sterke vekselvirkningen er uavhengig av elektrisk ladning, slik at tverrsnittet er uforandret om vi bytter ut et proton med et nøytron både i start-tilstanden og i slutt-tilstanden.

1d) Vi tillater oss å forenkle så mye at vi ser på hver prosess

$$\begin{aligned}
1: &\quad p+p \to p+\Delta^+ \;\; \to p+p+\pi^0\ , \\
2: &\quad p+p \to p+\Delta^+ \;\; \to p+n+\pi^+\ , \\
3: &\quad p+p \to n+\Delta^{++} \to n+p+\pi^+\ .
\end{aligned}$$

som en totrinnsprosess. Første trinn har vi allerede behandlet, det er en av prosessene

$$4: \quad p+p \to p+\Delta^+\ , \qquad 5: \quad p+p \to n+\Delta^{++}\ .$$

Andre trinn er en av de tre desintegrasjonene

$$6: \quad \Delta^+ \to p+\pi^0\ , \qquad 7: \quad \Delta^+ \to n+\pi^+\ , \qquad 8: \quad \Delta^{++} \to p+\pi^+\ .$$

Nummerer partiklene som c, d i mellomtilstanden og som e, f, g i slutt-tilstanden i hver av reaksjonene 1, 2 og 3. For fire-impulsene p_c, p_d, p_e, p_f, p_g antar vi at $p_c = p_e$ og $p_d = p_f + p_g$. Da må den invariante massen m_{fg}, definert ved at

$$m_{fg}^2 c^2 = \frac{(E_f + E_g)^2}{c^2} - (\vec{p}_f + \vec{p}_g)^2\ ,$$

være i nærheten av $m_\Delta = 1232\ \mathrm{MeV}/c^2$.

I tabellen over Clebsch–Gordan-koeffisienter finner vi koeffisientene for kopling av isospinn 1 og isospinn 1/2, i den rekkefølgen. Hvis vi insisterer på motsatt rekkefølge, $I_f = 1/2$ og $I_g = 1$, får vi et ekstra fortegn $(-1)^{I-I_f-I_g} = (-1)^{I-(3/2)}$, som vi tar med, selv om det ikke betyr noe for sluttresultatet. Vi finner at

$$\begin{aligned}
|p,\pi^0\rangle &= \left|I_{f3} = \frac{1}{2}, I_{g3} = 0\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|I = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}\right\rangle\ , \\
|n,\pi^+\rangle &= \left|I_{f3} = -\frac{1}{2}, I_{g3} = 1\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|I = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}\right\rangle\ , \\
|p,\pi^+\rangle &= \left|I_{f3} = \frac{1}{2}, I_{g3} = 1\right\rangle = \left|I = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{3}{2}\right\rangle\ .
\end{aligned}$$

Siden isospinnet er bevart, og Δ har isospinn 3/2, har vi amplitudene

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_6 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathcal{M}^{(3/2)}\ , \\
\mathcal{M}_7 &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,\mathcal{M}^{(3/2)}\ , \\
\mathcal{M}_8 &= \mathcal{M}^{(3/2)}\ .
\end{aligned}$$

Det gir følgende tre amplituder, når vi også bruker ligning (1) ovenfor,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \mathcal{M}_4\mathcal{M}_6 = \sqrt{\frac{1}{6}}\,\mathcal{M}^{(1)}\mathcal{M}^{(3/2)}\ , \\
\mathcal{M}_2 &= \mathcal{M}_4\mathcal{M}_7 = \sqrt{\frac{1}{12}}\,\mathcal{M}^{(1)}\mathcal{M}^{(3/2)}\ , \\
\mathcal{M}_3 &= \mathcal{M}_5\mathcal{M}_8 = -\sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathcal{M}^{(1)}\mathcal{M}^{(3/2)}\ .
\end{aligned}$$

Overfladisk sett skulle det gi følgende forhold mellom spredningstverrsnittene:

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{12} : \frac{3}{4} = 2 : 1 : 9 \ .$$

Nå tilbake til spørsmålet i oppgaven, forholdet mellom tverrsnittene for $p+p \to p+p+\pi^0$ og $p+p \to p+n+\pi^+$. Dersom den invariante massen til π-mesonet og det ene nukleonet er nær m_Δ, mens den invariante massen til π-mesonet og det andre nukleonet er vesentlig forskjellig fra m_Δ, er saken grei. Da ser vi forskjell på de tre prosessene $1, 2, 3$, og forholdet mellom de differensielle spredningstverrsnittene bør være $2 : 1 : 9$, under den forutsetningen at Δ-resonansen gir det dominerende bidraget.

Dersom begge de invariante massene er nær m_Δ, blir saken vesentlig mer komplisert, fordi vi får interferens mellom flere amplituder for samme prosess. Vi må antisymmetrisere slutt-tilstanden $p + p + \pi^0$, fordi protonene er fermioner. Og vi får interferens mellom prosessene 2 og 3. En full analyse er umulig uten å ta hensyn til egenspinnet til partiklene, og det ville føre alt for langt her.

2a) Start-tilstanden $K + d$ har isospinn $1/2$ i alle reaksjonene, siden K har isospinn $1/2$ og deuteronet d har isospinn 0. Slutt-tilstanden $\Lambda^0+\Delta^0$ er umulig (ved sterk vekselvirkning) fordi den har isospinn $3/2$. Begge reaksjonene $K^+ + d \to \Sigma^0 + \Delta^+$ og $K^+ + d \to \Sigma^0 + \Delta^{++}$ er umulige (ved sterk vekselvirkning) fordi særtallet S ikke bevares, vi har $S = +1$ i start-tilstanden og $S = -1$ i slutt-tilstanden. Reaksjonen $K^+ + d \to \Sigma^0 + \Delta^+$ bevarer ikke engang elektrisk ladning.

De tre gjenværende reaksjonene er mulige: $K^- + d \to \Sigma^0 + \Delta^0 \ , \ \Sigma^- + \Delta^+ \ , \ \Sigma^+ + \Delta^-$. Isospinnet i start-tilstanden er $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$, og isospinnet i slutt-tilstanden må være det samme. Vi skal kople isospinn $I_c = 1$ og $I_d = 3/2$ til $I = 1/2$ og $I_3 = -1/2$. Koeffisientene er tabulert for den motsatte rekkefølgen $3/2$ og 1, så da skal vi ha med en ekstra fortegnsfaktor $(-1)^{I-I_c-I_d} = (-1)^{I-5/2} = (-1)^{I-1/2}$. Vi kunne ha gjort som ovenfor og dekomponert hver av slutt-tilstandene i komponenter med totalt isospinn $I = 5/2$, $3/2$ og $1/2$. Men siden vi trenger bare den ene isospinntilstanden $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$, er det nok å dekomponere den, slik:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left|1, -\frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left|\Sigma^+, \Delta^-\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left|\Sigma^0, \Delta^0\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left|\Sigma^-, \Delta^+\right\rangle \ . \end{aligned}$$

Forholdet mellom tverrsnittene for slutt-tilstandene $\Sigma^+ + \Delta^-$, $\Sigma^0 + \Delta^0$ og $\Sigma^- + \Delta^+$ blir

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 3 : 2 : 1 \ .$$

2b) Levetiden er så lang at det må være svak vekselvirkning. Den lange levetiden har sammenheng med at særtallet ikke er bevart, noe som kjennetegner svak vekselvirkning.

Λ^0 har isospinn 0, så hvis $\Delta I = 1/2$, må slutt-tilstanden ha isospinn $1/2$ og være

$$\left|I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left|p, \pi^-\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left|n, \pi^0\right\rangle \ .$$

Vi skulle da få $2/3 = 66,7\,\%$ $p + \pi^-$ og $1/3 = 33,3\,\%$ $n + \pi^0$, ganske nær de observerte andelene på $63,9\,\%$ og $35,8\,\%$.

2c) En tilstand med et nøytron og en π^- har nødvendigvis totalt isospinn $I = 3/2$, $I_3 = -3/2$.

Når $\Sigma^+(1189) \rightarrow p + \pi^0$ og $n + \pi^+$ med omtrent like mye av de to slutt-tilstandene, så må det bety at vi har en superposisjon med noenlunde like mye av totalt isospinn $I = 1/2$ og $I = 3/2$. Som vi nettopp så, ville nemlig $I = 1/2$ gi 2/3 av $p + \pi^-$ og 1/3 av $n + \pi^0$. Omvendt ville $I = 3/2$ gi 1/3 av $p + \pi^-$ og 2/3 av $n + \pi^0$. Både $I = 1/2$ og $I = 3/2$ er konsistente med utvalgsregelen $\Delta I = 1/2$ (mer presist: $|\Delta I| = 1/2$).

$\Sigma^0(1193) \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ er en elektromagnetisk prosess, den er rundt regnet 10^9 ganger så rask som desintegrasjonene av $\Sigma^\pm$ ved svak vekselvirkning. Desintegrasjonene $\Sigma^0 \rightarrow p + \pi^-$ og $\Sigma^0 \rightarrow n + \pi^0$ er mulige ved svak vekselvirkning, men får aldri sjansen fordi den elektromagnetiske prosessen er så mye raskere.

2d) Den grunnleggende prosessen er at s-kvarken, med $S = -1$, sender ut en (virtuell) W^- og går over til enten en d-kvark eller en c-kvark. I denne prosessen er $\Delta S = \Delta Q = 1$.

Tilsvarende prosesser for anti-kvarkene $\overline{s}$, $\overline{u}$ og $\overline{c}$ gir $\Delta S = \Delta Q = -1$.

3a) Definer $f = f(t) = \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}m_S + \frac{\Gamma_S}{2}\right)t}$ og $g = g(t) = \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}m_L + \frac{\Gamma_L}{2}\right)t}$, slik at

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f\,|K_1^0\rangle + g\,|K_2^0\rangle \right) = \frac{1}{2} \left((f+g)\,|K^0\rangle - (f-g)\,|\overline{K}^0\rangle \right) .$$

Den unormerte sannsynligheten for K^0 er

$$\begin{aligned} q_1 &= |f+g|^2 = (f^* + g^*)(f+g) = |f|^2 + |g|^2 + f^* g + g^* f \\ &= \mathrm{e}^{-\Gamma_S t} + \mathrm{e}^{-\Gamma_L t} + 2\,\mathrm{e}^{-\overline{\Gamma}\,t} \cos(\Delta m\, t) \\ &= 2\,\mathrm{e}^{-\overline{\Gamma}\,t} \left(\cosh(\gamma t) + \cos(\Delta m\, t)\right) , \end{aligned}$$

når vi definerer

$$\overline{\Gamma} = \frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2} , \qquad \gamma = \frac{\Gamma_S - \Gamma_L}{2} , \qquad \Delta m = m_L - m_S .$$

Den unormerte sannsynligheten for $\overline{K}^0$ er

$$\begin{aligned} q_2 &= |f-g|^2 = (f^* - g^*)(f-g) = |f|^2 + |g|^2 - f^* g - g^* f \\ &= \mathrm{e}^{-\Gamma_S t} + \mathrm{e}^{-\Gamma_L t} - 2\,\mathrm{e}^{-\overline{\Gamma}\,t} \cos(\Delta m\, t) \\ &= 2\,\mathrm{e}^{-\overline{\Gamma}\,t} \left(\cosh(\gamma t) - \cos(\Delta m\, t)\right) . \end{aligned}$$

Den normerte sannsynligheten for K^0 er da

$$p_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(\Delta m\, t))}{2\cosh(\gamma t)} ,$$

mens den normerte sannsynligheten for $\overline{K}^0$ er

$$p_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\Delta m\, t))}{2\cosh(\gamma t)} .$$

Vi ser at $q_1(t) \rightarrow 1/2$ og $q_2(t) \rightarrow 1/2$ når $t \rightarrow \infty$.

3b) Med de forutsetningene vi har gjort, er

$$\delta(t) = p_1(t) - p_2(t) = \frac{\cos(\Delta m\, t))}{\cosh(\gamma t)} \ .$$

Spesielt impliserer det at $\delta(t) \to 0$ når $t \to \infty$.

3c) Vår teoretiske formel er uavhengig av fortegnet til Δm. Det er vist eksperimentelt at $\Delta m > 0$, men da på andre måter, her kan vi bare måle $|\Delta m|$.

Det mest nøyaktige estimatet av Δm, i hvert fall når vi bare bruker øyemål, får vi antagelig fra nullpunktene til asymmetrien $\delta(t)$. I følge vår teoretiske formel skal $\delta(t) = 0$ for $\Delta m\, t = \pi/2$ og for $\Delta m\, t = 3\pi/2$. Nå vet vi strengt tatt ikke hvor nøyaktig nullpunktet for tidsaksen er bestemt, derfor er det tryggest å bruke de to synlige nullpunktene, som vi estimerer til $t_1 = 0,27$ ns og $t_2 = 0,94$ ns, idet vi tar hensyn til at grenseverdien når $t \to \infty$ tydeligvis ikke er 0. Vi skal altså ha at

$$\Delta m\,(t_2 - t_1) = \Delta m \times 0,67 \text{ ns} = \pi \ ,$$

og dermed (husk at $\hbar = 1$ og $c = 1$)

$$\begin{aligned} \Delta m \ &= \frac{\pi}{0,67 \text{ ns}} = 4,7 \times 10^9/\text{s} = 4,7 \times 10^9\ (\hbar/\text{s})/c^2 \\ &= 4,7 \times 10^9 \times 6,58 \times 10^{-22}\ \text{MeV}/c^2 = 3,1 \times 10^{-12}\ \text{MeV}/c^2 \ . \end{aligned}$$

Fasitsvaret er $\Delta m = 3,483 \times 10^{-12}$ MeV/c^2 og $\Delta m/m_K = 7,000 \times 10^{-15}$.

Raten γ kan vi for eksempel estimere fra den negative minimumsverdien til $\delta(t)$, som er anslagsvis -0.057, ved $t_3 = 0,42$ ns. Ved dette tidspunktet skal vi ha at

$$\cos(\Delta m\ t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{(t_3 - t_1)\pi}{t_2 - t_1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 0,224\,\pi\right) = -0,65 \ .$$

Altså:

$$\delta(t_3) = -0,057 = \frac{-0,65}{\cosh(\gamma t_3)} \approx -1,30\,\mathrm{e}^{-\gamma t_3} \ ,$$

som gir at

$$\gamma = \frac{\ln(1,30/0,057)}{t_3} = \frac{3,13}{0,42 \text{ ns}} = 7,4 \times 10^9/\text{s} = \frac{1}{1,34 \times 10^{-10}\ \text{s}} \ .$$

Nå vet vi tilfeldigvis at $\Gamma_L \ll \Gamma_S$, og da kan vi sette

$$\Gamma_S \approx 2\gamma = 1,48 \times 10^{10}/\text{s} = \frac{1}{6,7 \times 10^{-11}\ \text{s}} \ .$$

Etter dette skulle midlere levetid for K_S være $6,7 \times 10^{-11}$ s (fasit er $8,96 \times 10^{-11}$ s).

Figuren antyder at grenseverdien for $\delta(t)$ når $t \to \infty$ er rundt regnet 0.004 (den eksperimentelle fasiten er $0,00332 \pm 0,00006$). Siden vi regnet ut grensverdien 0 under forutsetning av CP-invarians, har vi her et eksperimentelt bevis på at CP-invariansen er brutt.