



Midtsemesterprøve i FY3403 PARTIKKELFYSIKK

Onsdag 22. oktober 2008

14:15–16:00

Tillatte hjelpemidler: Vanlig kalkulator

Husk å skrive studentnummeret ditt på hvert ark av dette oppgavesettet.

Dette oppgavesettet er på 6 sider.

Oppgave 1.

Hvilke bevaringslover og symmetrier gjelder for hvilke vekselvirkninger?

Enten eksakt (E), tilnærmet (T) eller ikke i det hele tatt (I). Med «eksakt» menes her at det aldri er observert brudd på bevaringsloven eller symmetrien. Kryss av i tabellen:

Vekselvirkning:	sterk			elektromagnetisk			svak		
	E	T	I	E	T	I	E	T	I
Energi	3			3			3		
Impuls	3			3			3		
Dreieimpuls	3			3			3		
Paritet (P)	3			3				1	3
Elektrisk ladning	3			3			3		
Baryontall	3			3			3		
Leptontall	3			3			3		
Fotontall	3				1	3	3		
u-tall (antall u-kvarker)	3			3				1	3
ud-tall (antall u- og d-kvarker)	3			3				3	3
W-tall (antall W-bosoner)	3			3				1	3
Særtall («strangeness»)	3			3				1	3
Fargeladning («colour»)	3			3			3		
Isospinn, komponenter I_1, I_2, I_3	3				1	3		1	3
Isospinn, komponent I_3	3			3				1	3
G -paritet	3				1	3		1	3
Ladningskonjugasjon (C)	3			3				1	3
Tidsreversjon (T)	3			3				3	2
CP	3			3				3	2
CPT	3			3			3		

3 poeng for rett svar, 1 eller 2 poeng for ikke helt galt svar, maksimum 180 poeng.

Oppgave 2.

Et π^+ -meson (masse $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$) med energi E_π kolliderer med et proton (masse $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$) som ligger i ro. Finn et uttrykk for den totale massesenterenergien E_{CM} .

Bruk den relativistiske invarianten $p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - |\vec{p}|^2$, der p^μ er den totale firerimpulsen. I massesentersystemet er $\vec{p} = 0$ og $p^\mu p_\mu = (E_{\text{CM}}/c)^2$.

I laboratoriesystemet, der protonet ligger i ro, er

$$p^\mu p_\mu = \frac{(E_\pi + m_p c^2)^2}{c^2} - |\vec{p}_\pi|^2 = m_p^2 c^2 + 2m_p E_\pi + \frac{E_\pi^2}{c^2} - |\vec{p}_\pi|^2 = m_p^2 c^2 + 2m_p E_\pi + m_\pi^2 c^2 .$$

Det gir at

$$E_{\text{CM}} = c \sqrt{(m_p^2 + m_\pi^2)c^2 + 2m_p E_\pi} .$$

Hva er E_π dersom $E_{\text{CM}} = 1232 \text{ MeV}$?

Hvorfor har spredningstverrsnittet et maksimum ved denne energien?

$$E_\pi = \frac{E_{\text{CM}}^2 - (m_p^2 + m_\pi^2)c^4}{2m_p c^2} = \frac{1232^2 - (938^2 + 140^2)}{2 \times 938} \text{ MeV} = 330 \text{ MeV} .$$

Ved massesenterenergien $E_{\text{CM}} = 1232 \text{ MeV}$ er spredningstverrsnittet stort på grunn av en resonans, med spinn 3/2 og isospinn 3/2, kjent som partikkelen $\Delta(1232)$.

Oppgave 3.

En tilstand av to π -mesoner kan ha totalt isospinn enten 0, 1 eller 2. En tilstand $|I, I_3\rangle$ med totalt isospinn I og isospinnkomponent I_3 kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av forskjellige ladningskombinasjoner for de to π -mesonene. Bruk den vedlagte tabellen over Clebsch–Gordan-koeffisienter, og skriv inn de koeffisientene som mangler i de følgende formelene:

$$\begin{aligned} |2, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}} |\pi^+ \pi^- \rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} |\pi^- \pi^+ \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 \pi^0 \rangle , \\ |1, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^+ \pi^- \rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^- \pi^+ \rangle + 0 |\pi^0 \pi^0 \rangle , \\ |0, 0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^+ \pi^- \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^- \pi^+ \rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0 \pi^0 \rangle , \\ |2, 1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^+ \pi^0 \rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^0 \pi^+ \rangle , \\ |1, 1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^+ \pi^0 \rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^0 \pi^+ \rangle . \end{aligned}$$

Merk: Disse formelene forutsetter at vi identifiser $\pi^\pm$ og π^0 med isospinntilstandene $I_3 = \pm 1$ og $I_3 = 0$. Det korrekte er strengt tatt at $|\pi^- \rangle = -|I = 1, I_3 = -1\rangle$, og følgelig

$$\begin{aligned}
|2, 0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{6}} |\pi^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} |\pi^-\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0\pi^0\rangle, \\
|1, 0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^+\pi^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |\pi^-\pi^+\rangle, \\
|0, 0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^-\pi^+\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0\pi^0\rangle.
\end{aligned}$$

Dette var det ingen som kommenterte, og det spiller heller ikke noen vesentlig rolle.

Er isospinn-delen av bølgefunksjonen symmetrisk eller antisymmetrisk under ombytte av de to π -mesonene?

Den er symmetrisk for $I = \boxed{0, 2}$ og antisymmetrisk for $I = \boxed{1}$

Kommentar: Tilsvarende, av to vektorer $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ og $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ (begge spinn 1) kan vi lage skalaren $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (spinn 0, symmetrisk), og vektoren $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$ (spinn 1, antisymmetrisk). Av de 9 produktene a_ib_j har vi da 5 uavhengige lineærkombinasjoner igjen, for eksempel $a_yb_z + a_zb_y$, $a_zb_x + a_xb_z$, $a_xb_y + a_yb_x$, $a_xb_x - a_yb_y$ og $a_xb_x + a_yb_y - 2a_zb_z$. De er komponenter av en symmetrisk tensor som har spinn 2.

Tabellen nedenfor gir massen (i MeV/ c^2) og kvantetallene $I^G(J^{PC})$ eller $I(J^P)$ for noen partikler (I = isospinn, J = spinn). Egenverdien ± 1 for C gjelder for den nøytrale partikkelen i en isospinmultiplett. Bruk tabellen til å svare på de følgende oppgavene.

$\pi^\pm(140)$	$1^-(0^-)$	$\pi^0(135)$	$1^-(0^{-+})$	$\eta(548)$	$0^+(0^{-+})$
$\rho(770)$	$1^+(1^{--})$	$K^\pm(494)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	$K^0(498)$	$\frac{1}{2}(0^-)$

Oppgave 4.

Vektormesonet $\rho(770)$ desintegrerer nesten 100 % til 2 π -mesoner.

Hvorfor ikke til 3 π -mesoner?

Fordi G -pariteten er bevart i sterke vekselvirkninger. For ρ -mesonet er $G = 1$, for n π -mesoner er $G = (-1)^n$.

$\rho^0(770)$ desintegrerer nesten 100 % til $\pi^+\pi^-$, og aldri til $\pi^0\pi^0$.

Dette er en test på at isospinnet er bevart. Hvorfor?

ρ -mesonet har isospinn $I = 1$. Hvis isospinnet er bevart, må slutt-tilstanden med to π -mesoner også ha isospinn 1. Som vi fant i oppgave 3, har $\pi\pi$ -tilstanden med isospinn 1 ingen innblanding av $\pi^0\pi^0$.

Oppgave 5.

Partikkelen $\eta(548)$ er stabil under sterke vekselvirkninger, fordi den ikke kan desintegre til to, tre eller flere π -mesoner ved sterk vekselvirkning.

Hvorfor er $\eta \rightarrow 4\pi$ umulig?

$\eta \rightarrow 4\pi$ er (nesten) umulig på grunn av energibevaring. Summen av massene til 4 ladde π -mesoner er $560 \text{ GeV}/c^2$, altså mer enn massen til η . Summen av massene til 4 nøytrale π -mesoner er $540 \text{ GeV}/c^2$, som er marginalt mindre enn massen til η .

Hvorfor er $\eta \rightarrow 3\pi$ umulig ved sterk vekselvirkning?

Fordi G -pariteten er bevart i sterke vekselvirkninger. For η er $G = 1$, for 3 π -mesoner er $G = -1$.

Hvorfor er $\eta \rightarrow 2\pi$ umulig ved sterk vekselvirkning?

Fordi pariteten P er bevart i sterke vekselvirkninger. For η i ro er $P = -1$. For 2 π -mesoner med banedreieimpuls $\ell = 0$ (vi må ha $\ell = 0$ fordi η og π har spinn 0 og den totale dreieimpulsen er bevart) er $P = \epsilon^2 (-1)^\ell = 1$, der $\epsilon = -1$ er den indre pariteten til π -mesonet.

De desintegrasjonsmodene som observeres er bl.a. 2γ (39 %), $3\pi^0$ (33 %) og $\pi^+\pi^-\pi^0$ (23 %). De er alle mulige ved elektromagnetisk vekselvirkning.

Hvorfor observeres ikke $\eta \rightarrow 2\pi^0$ eller $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-$?

$\eta \rightarrow 2\pi$ er umulig ved elektromagnetisk vekselvirkning, fordi pariteten er bevart også i elektromagnetiske vekselvirkninger.

$\eta \rightarrow 2\pi$ er kanskje mulig ved svak vekselvirkning, men observeres ikke fordi den konkurrerer med $\eta \rightarrow 3\pi$, som er en elektromagnetisk prosess og derfor mye raskere.

Oppgave 6.

(Denne oppgaven teller med bare dersom den er korrekt besvart.)

K^+ -mesonet og det kortlivete K^0 -mesonet, K_S^0 , kan begge desintegrere til to π -mesoner. Det skjer ved svak vekselvirkning, og hverken særtall eller isospinn er bevart.

Forandringen i totalt isospinn, ΔI , er enten $1/2$ eller $3/2$.

I prosessene $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ og $K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ må slutt-tilstanden ha isospinn enten 0 eller 2. Hvorfor er isospinn 1 umulig?

Både K og π har spinn 0. Fordi dreieimpulsen er bevart, må de to π -mesonene i slutt-tilstanden ha bandedreieimpuls $\ell = 0$ (vi velger å se prosessen fra hvilesystemet til K). Rombølgefunksjonen ψ_{rom} er da en funksjon av den relative posisjonen $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, der $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er posisjonene til π -mesonene. Ombytte av partiklene, $1 \leftrightarrow 2$, gir at $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ og $\psi_{\text{rom}}(\vec{r}) \rightarrow \psi_{\text{rom}}(-\vec{r}) = (-1)^\ell \psi_{\text{rom}}(\vec{r}) = \psi_{\text{rom}}(\vec{r})$.

Siden π -mesonene er bosoner, må den totale bølgefunksjonen $\psi = \psi_{\text{isospinn}}\psi_{\text{rom}}$ være symmetrisk under ombyttet $1 \leftrightarrow 2$. Siden rombølgefunksjonen er symmetrisk, må også isospinnbølgefunksjonen være symmetrisk. Det utelukker isospinn $I = 1$, i følge oppgave 3 ovenfor.

I prosessen $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ må slutt-tilstanden ha isospinn 2. Hvorfor?

Isospinn $I = 1$ er utelukket av samme grunn som for $K^0 \rightarrow \pi\pi$. $I = 0$ er utelukket her simpelthen fordi slutt-tilstanden $\pi^+\pi^0$ har tredjekomponent av isospinnet $I_3 = 1$. Da står vi igjen med $I = 2$ som eneste mulighet.

Levetiden for K^+ er $1,2 \cdot 10^{-8}$ s, mer enn 100 ganger levetiden for K_S^0 , som er $0,9 \cdot 10^{-10}$ s.

Dette forholdet mellom levetidene kan tyde på at $\Delta I = 3/2$ er mye mindre sannsynlig enn $\Delta I = 1/2$, slik at slutt-tilstanden for $K_S^0 \rightarrow \pi\pi$ har totalt isospinn 0 (i hvert fall som en god tilnærming).

Hvilken forutsigelse gir det for forgreningsforholdet mellom $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ og $K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$?

Vi fant i oppgave 3 at tilstanden med totalt isospinn 0 har tre like store komponenter, nemlig $\pi^+\pi^-$, $\pi^-\pi^+$ og $\pi^0\pi^0$. Da er sannsynligheten $2/3 = 66,7\%$ for to ladde π -mesoner og $1/3 = 33,3\%$ for to nøytrale π -mesoner.

Den eksperimentelle fasiten er at det kortlivete K^0 -mesonet K_S^0 , som desintegrerer til to π -mesoner, går $68,6\%$ til $\pi^+\pi^-$ og $31,4\%$ til $\pi^0\pi^0$.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1	m_2	
m_1	m_2	Coefficients
$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	

$$1/2 \times 1/2$$

1		
+1/2	1	0
+1/2	1	0
+1/2	-1/2	1/2
-1/2	+1/2	1/2
-1/2	-1/2	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$2 \times 1/2$$

5/2		
+5/2		
+2	+1/2	1
+2	-1/2	1/5
+1	+1/2	4/5
+1	-1/2	4/5
0	+1/2	2/5
0	-1/2	2/5
-1	+1/2	3/5
-1	-1/2	3/5
-2	+1/2	1/5
-2	-1/2	1/5

$$3/2 \times 1/2$$

2		
+3/2		
+3/2	+1/2	1
+3/2	-1/2	1/4
+1/2	+1/2	3/4
+1/2	-1/2	3/4
0	+1/2	1/4
0	-1/2	1/4
-1/2	+1/2	1/4
-1/2	-1/2	1/4
-3/2	+1/2	1/4
-3/2	-1/2	1/4

$$1 \times 1/2$$

3/2		
+3/2		
+1	+1/2	1
+1	-1/2	1/3
0	+1/2	2/3
0	-1/2	2/3
-1	+1/2	1/3
-1	-1/2	1/3

$$2 \times 1$$

3		
+3		
+2	+1	1
+2	0	1/3
+1	+1	2/3
+1	0	2/3
0	+1	1/3
0	0	2/3
-1	+1	1/3
-1	0	2/3
-2	+1	1/3
-2	0	1/3

$$1 \times 1$$

2		
+2		
+1	+1	1
+1	0	1/2
0	+1	1/2
0	0	1/2
-1	+1	1/2
-1	0	1/2
-2	+1	1/2
-2	0	1/2

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d_{\ell,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^\ell e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$$

$$3/2 \times 3/2$$

3		
+3		
+3/2	+3/2	1
+3/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2
+1/2	1/2	1/2
0	+3/2	1/2
0	1/2	1/2
-1/2	+3/2	1/2
-1/2	1/2	1/2
-3/2	+3/2	1/2
-3/2	1/2	1/2

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta$$

$$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$2 \times 2$$

4		
+4		
+2	+2	1
+2	1/2	1/2
+1	+2	1/2
+1	1/2	1/2
0	+2	1/2
0	1/2	1/2
-1	+2	1/2
-1	1/2	1/2
-2	+2	1/2
-2	1/2	1/2

$$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$$

$$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$$

$$d_{1,0}^1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.