NTNU **Institutt for fysikk**

Midtsemesterprøve i FY3403 PARTIKKELFYSIKK

Onsdag 22. oktober 2008
14:15–16:00

Tillatte hjelpemidler: Vanlig kalkulator

Husk å skrive studentnummeret ditt på hvert ark av dette oppgavesettet.

Dette oppgavesettet er på 6 sider.

Oppgave 1.

Hvilke bevaringslover og symmetrier gjelder for hvilke vekselvirkninger?
Enten eksakt (E), tilnærmet (T) eller ikke i det hele tatt (I). Med «eksakt» menes her at det aldri er observert brudd på bevaringsloven eller symmetrien. Kryss av i tabellen:

Vekselvirkning:	sterk			elektromagnetisk			svak		
	E	T	I	E	T	I	E	T	I
Energi	3			3			3		
Impuls	3			3			3		
Dreieimpuls	3			3			3		
Paritet (P)	3			3				1	3
Elektrisk ladning	3			3			3		
Baryontall	3			3			3		
Leptontall	3			3			3		
Fotontall	3				1	3	3		
u-tall (antall u-kvarker)	3			3				1	3
ud-tall (antall u- og d-kvarker)	3			3				3	3
W-tall (antall W-bosoner)	3			3				1	3
Særtall («strangeness»)	3			3				1	3
Fargeladning («colour»)	3			3			3		
Isospinn, komponenter I_1, I_2, I_3	3				1	3		1	3
Isospinn, komponent I_3	3			3				1	3
G-paritet	3				1	3		1	3
Ladningskonjugasjon (C)	3			3				1	3
Tidsreversjon (T)	3			3				3	2
CP	3			3				3	2
CPT	3			3			3		

3 poeng for rett svar, 1 eller 2 poeng for ikke helt galt svar, maksimum 180 poeng.

Oppgave 2.

Et π^+-meson (masse $m_\pi = 140$ MeV/c^2) med energi E_π kolliderer med et proton (masse $m_p = 938$ MeV/c^2) som ligger i ro. Finn et uttrykk for den totale massesenterenergien $E_{\rm CM}$.

Bruk den relativistiske invarianten $p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - |\vec{p}|^2$, der p^μ er den totale firerimpulsen.
I massesentersystemet er $\vec{p} = 0$ og $p^\mu p_\mu = (E_{\rm CM}/c)^2$.
I laboratoriesystemet, der protonet ligger i ro, er

$$p^\mu p_\mu = \frac{(E_\pi + m_p c^2)^2}{c^2} - |\vec{p}_\pi|^2 = m_p^2 c^2 + 2 m_p E_\pi + \frac{E_\pi^2}{c^2} - |\vec{p}_\pi|^2 = m_p^2 c^2 + 2 m_p E_\pi + m_\pi^2 c^2 \ .$$

Det gir at

$$E_{\rm CM} = c\sqrt{(m_p^2 + m_\pi^2)c^2 + 2 m_p E_\pi} \ .$$

Hva er E_π dersom $E_{\rm CM} = 1232$ MeV ?
Hvorfor har spredningstverrsnittet et maksimum ved denne energien?

$$E_\pi = \frac{E_{\rm CM}^2 - (m_p^2 + m_\pi^2)c^4}{2 m_p c^2} = \frac{1232^2 - (938^2 + 140^2)}{2 \times 938} \text{ MeV} = 330 \text{ MeV} \ .$$

Ved massesenterenergien $E_{\rm CM} = 1232$ MeV er spredningstverrsnittet stort på grunn av en resonans, med spinn 3/2 og isospinn 3/2, kjent som partikkelen $\Delta(1232)$.

Oppgave 3.

En tilstand av to π-mesoner kan ha totalt isospinn enten 0, 1 eller 2. En tilstand $|I, I_3\rangle$ med totalt isospinn I og isospinnkomponent I_3 kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av forskjellige ladningskombinasjoner for de to π-mesonene. Bruk den vedlagte tabellen over Clebsch–Gordan-koeffisienter, og skriv inn de koeffisientene som mangler i de følgende formlene:

$$\begin{aligned}
|2,0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}\,|\pi^+\pi^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}\,|\pi^-\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^0\pi^0\rangle \ , \\
|1,0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^-\pi^+\rangle + 0\,|\pi^0\pi^0\rangle \ , \\
|0,0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^+\pi^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^-\pi^+\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^0\pi^0\rangle \ , \\
|2,1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^+\pi^0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^0\pi^+\rangle \ , \\
|1,1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^+\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^0\pi^+\rangle \ .
\end{aligned}$$

Merk: Disse formlene forutsetter at vi identifiser $\pi^\pm$ og π^0 med isospinntilstandene $I_3 = \pm 1$ og $I_3 = 0$. Det korrekte er strengt tatt at $|\pi^-\rangle = -|I = 1, I_3 = -1\rangle$, og følgelig

$$
\begin{aligned}
|2,0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{6}}\,|\pi^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}\,|\pi^-\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi^0\pi^0\rangle\,, \\
|1,0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^+\pi^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\pi^-\pi^+\rangle\,, \\
|0,0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^-\pi^+\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi^0\pi^0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Dette var det ingen som kommenterte, og det spiller heller ikke noen vesentlig rolle.

Er isospinn-delen av bølgefunksjonen symmetrisk eller antisymmetrisk under ombytte av de to π-mesonene?

Den er symmetrisk for $I = \boxed{0,\,2}$ og antisymmetrisk for $I = \boxed{1}$

Kommentar: Tilsvarende, av to vektorer $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$ og $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$ (begge spinn 1) kan vi lage skalaren $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (spinn 0, symmetrisk), og vektoren $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{\imath} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{\jmath} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$ (spinn 1, antisymmetrisk). Av de 9 produktene a_ib_j har vi da 5 uavhengige lineærkombinasjoner igjen, for eksempel $a_yb_z + a_zb_y$, $a_zb_x + a_xb_z$, $a_xb_y + a_yb_x$, $a_xb_x - a_yb_y$ og $a_xb_x + a_yb_y - 2a_zb_z$. De er komponenter av en symmetrisk tensor som har spinn 2.

Tabellen nedenfor gir massen (i MeV/c^2) og kvantetallene $I^G(J^{PC})$ eller $I(J^P)$ for noen partikler (I = isospinn, J = spinn). Egenverdien ±1 for C gjelder for den nøytrale partikkelen i en isospinnmultiplett. Bruk tabellen til å svare på de følgende oppgavene.

$\pi^\pm(140)$	$1^-(0^-)$	$\pi^0(135)$	$1^-(0^{-+})$	$\eta(548)$	$0^+(0^{-+})$
$\rho(770)$	$1^+(1^{--})$	$K^\pm(494)$	$\frac{1}{2}(0^-)$	$K^0(498)$	$\frac{1}{2}(0^-)$

Oppgave 4.

Vektormesonet $\rho(770)$ desintegrerer nesten 100 % til 2 π-mesoner.
Hvorfor ikke til 3 π-mesoner?

Fordi G-pariteten er bevart i sterke vekselvirkninger. For ρ-mesonet er $G = 1$, for n π-mesoner er $G = (-1)^n$.

$\rho^0(770)$ desintegrerer nesten 100 % til $\pi^+\pi^-$, og aldri til $\pi^0\pi^0$.
Dette er en test på at isospinnet er bevart. Hvorfor?

ρ-mesonet har isospinn $I = 1$. Hvis isospinnet er bevart, må slutt-tilstanden med to π-mesoner også ha isospinn 1. Som vi fant i oppgave 3, har $\pi\pi$-tilstanden med isospinn 1 ingen innblanding av $\pi^0\pi^0$.

Oppgave 5.

Partikkelen $\eta(548)$ er stabil under sterke vekselvirkninger, fordi den ikke kan desintegrere til to, tre eller flere π-mesoner ved sterk vekselvirkning.

Hvorfor er $\eta \to 4\pi$ umulig?

$\eta \to 4\pi$ er (nesten) umulig på grunn av energibevaring. Summen av massene til 4 ladde π-mesoner er 560 GeV/c^2, altså mer enn massen til η. Summen av massene til 4 nøytrale π-mesoner er 540 GeV/c^2, som er marginalt mindre enn massen til η.

Hvorfor er $\eta \to 3\pi$ umulig ved sterk vekselvirkning?

Fordi G-pariteten er bevart i sterke vekselvirkninger. For η er $G = 1$, for 3 π-mesoner er $G = -1$.

Hvorfor er $\eta \to 2\pi$ umulig ved sterk vekselvirkning?

Fordi pariteten P er bevart i sterke vekselvirkninger. For η i ro er $P = -1$. For 2 π-mesoner med banedreieimpuls $\ell = 0$ (vi må ha $\ell = 0$ fordi η og π har spinn 0 og den totale dreieimpulsen er bevart) er $P = \epsilon^2 (-1)^\ell = 1$, der $\epsilon = -1$ er den indre pariteten til π-mesonet.

De desintegrasjonsmodene som observeres er bl.a. 2γ (39 %), $3\pi^0$ (33 %) og $\pi^+\pi^-\pi^0$ (23 %). De er alle mulige ved elektromagnetisk vekselvirkning.

Hvorfor observeres ikke $\eta \to 2\pi^0$ eller $\eta \to \pi^+\pi^-$?

$\eta \to 2\pi$ er umulig ved elektromagnetisk vekselvirkning, fordi pariteten er bevart også i elektromagnetiske vekselvirkninger.
$\eta \to 2\pi$ er kanskje mulig ved svak vekselvirkning, men observeres ikke fordi den konkurrerer med $\eta \to 3\pi$, som er en elektromagnetisk prosess og derfor mye raskere.

Oppgave 6.

(Denne oppgaven teller med bare dersom den er korrekt besvart.)
K^+-mesonet og det kortlivete K^0-mesonet, K^0_S, kan begge desintegrere til to π-mesoner. Det skjer ved svak vekselvirkning, og hverken særtall eller isospinn er bevart.
Forandringen i totalt isospinn, ΔI, er enten 1/2 eller 3/2.

I prosessene $K^0_S \to \pi^+\pi^-$ og $K^0_S \to \pi^0\pi^0$ må slutt-tilstanden ha isospinn enten 0 eller 2. Hvorfor er isospinn 1 umulig?

Både K og π har spinn 0. Fordi dreieimpulsen er bevart, må de to π-mesonene i slutt-tilstanden ha banedreieimpuls $\ell = 0$ (vi velger å se prosessen fra hvilesystemet til K). Rombølgefunksjonen ψ_{rom} er da en funksjon av den relative posisjonen $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, der $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er posisjonene til π-mesonene. Ombytte av partiklene, $1 \leftrightarrow 2$, gir at $\vec{r} \to -\vec{r}$ og $\psi_{\text{rom}}(\vec{r}) \to \psi_{\text{rom}}(-\vec{r}) = (-1)^\ell \psi_{\text{rom}}(\vec{r}) = \psi_{\text{rom}}(\vec{r})$.
Siden π-mesonene er bosoner, må den totale bølgefunksjonen $\psi = \psi_{\text{isospinn}}\psi_{\text{rom}}$ være symmetrisk under ombyttet $1 \leftrightarrow 2$. Siden rombølgefunksjonen er symmetrisk, må også isospinnbølgefunksjonen være symmetrisk. Det utelukker isospinn $I = 1$, i følge oppgave 3 ovenfor.

I prosessen $K^+ \to \pi^+\pi^0$ må slutt-tilstanden ha isospinn 2. Hvorfor?

Isospinn $I = 1$ er utelukket av samme grunn som for $K^\circ \to \pi\pi$. $I = 0$ er utelukket her simpelthen fordi slutt-tilstanden $\pi^+\pi^0$ har tredjekomponent av isospinnet $I_3 = 1$. Da står vi igjen med $I = 2$ som eneste mulighet.

Levetiden for K^+ er 1,2 10^{-8} s, mer enn 100 ganger levetiden for K^0_S, som er 0,9 10^{-10} s.
Dette forholdet mellom levetidene kan tyde på at $\Delta I = 3/2$ er mye mindre sannsynlig enn $\Delta I = 1/2$, slik at slutt-tilstanden for $K^0_S \to \pi\pi$ har totalt isospinn 0 (i hvert fall som en god tilnærming).

Hvilken forutsigelse gir det for forgreningsforholdet mellom $K^0_S \to \pi^+\pi^-$ og $K^0_S \to \pi^0\pi^0$?

Vi fant i oppgave 3 at tilstanden med totalt isospinn 0 har tre like store komponenter, nemlig $\pi^+\pi^-$, $\pi^-\pi^+$ og $\pi^0\pi^0$. Da er sannsynligheten $2/3 = 66,7\,\%$ for to ladde π-mesoner og $1/3 = 33,3\,\%$ for to nøytrale π-mesoner.

Den eksperimentelle fasiten er at det kortlivete K^0-mesonet K^0_S, som desintegrerer til to π-mesoner, går 68,6 % til $\pi^+\pi^-$ og 31,4 % til $\pi^0\pi^0$.

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

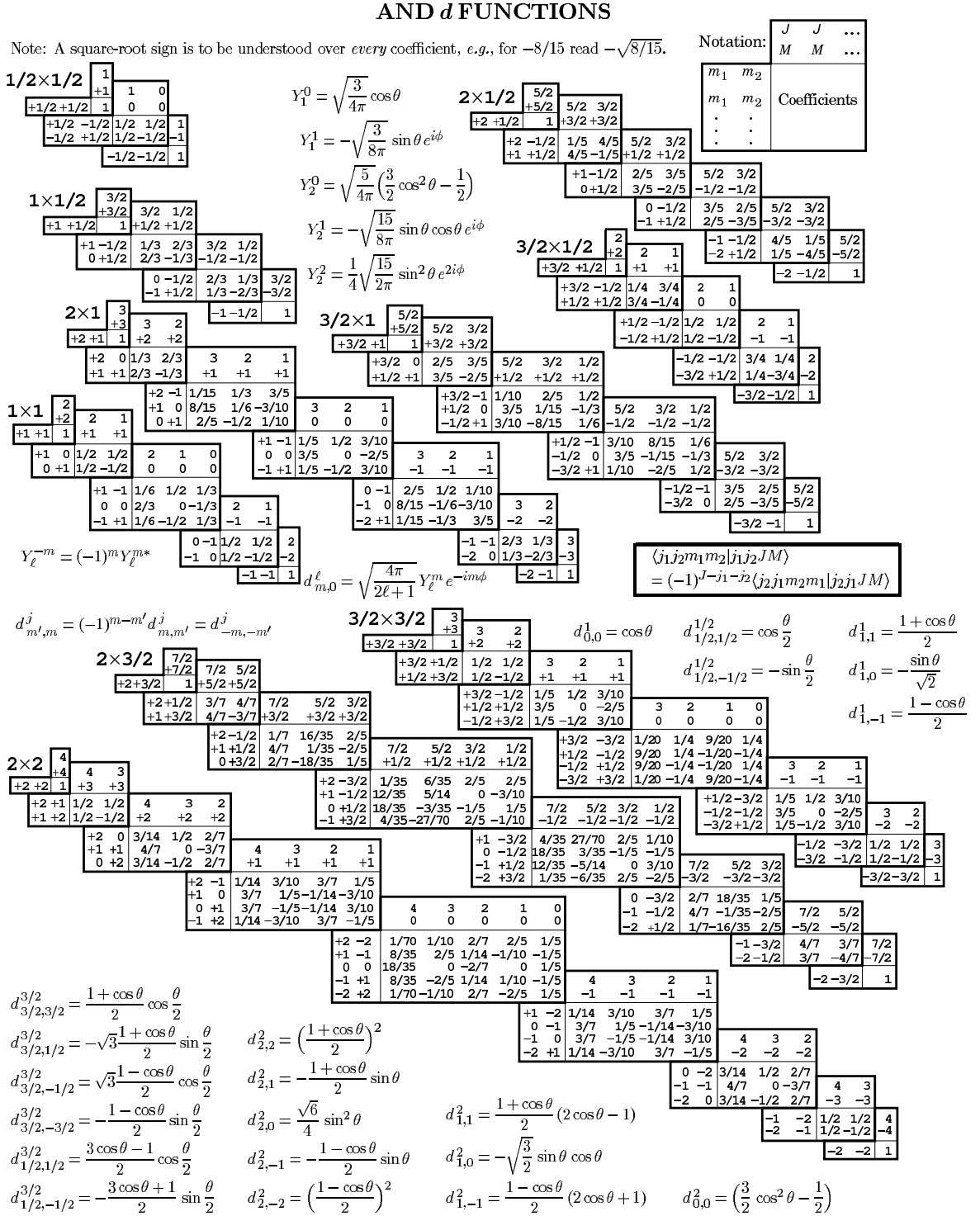

Figure 35.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.