NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

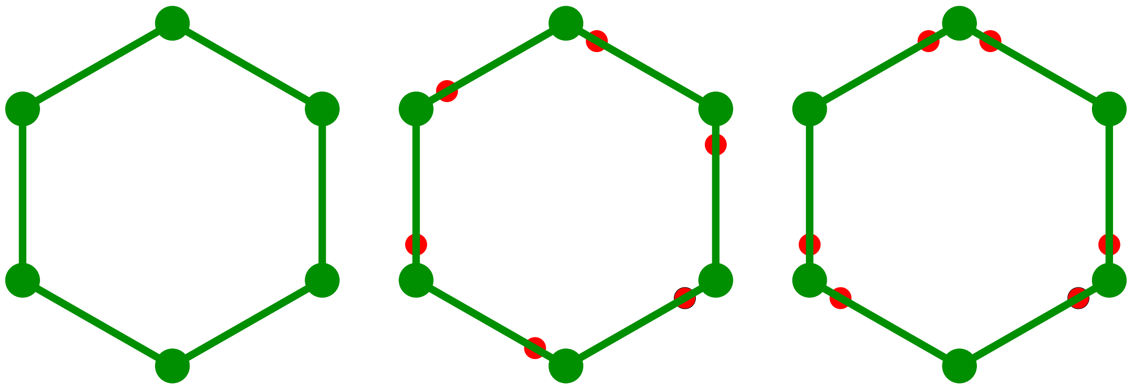
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52

Eksamen i fag DIF4984 Anvendelse av symmetrigrupper i fysikken
Fredag 17. desember 1999
Tid: 09:00—15:00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.

Dette oppgavesettet er på 3 sider pluss et generelt vedlegg på 1 sider.

Oppgave 1:



A **B** **C**

a) Betrakt de tre figurene **A**–**C** over som to-dimensjonale (planare) strukturer. Beskriv for hver av figurene mengden av transformasjoner som avbilder figuren på seg selv.

b) Hvilke betingelser må være oppfylt for at en mengde av transformasjoner skal utgjøre en gruppe? Hvilke betingelser må være oppfylt for at en mengde av transformasjoner skal utgjøre en *abelsk* gruppe?

c) Hvilke av mengdene over utgjør en gruppe? Hvilke av mengdene over utgjør en *abelsk* gruppe?

d) Se nærmere på mengden av transformasjoner for figur **A**. Beskriv sammensetningsreglene ("multiplikasjonstabellen") for disse transformasjonene.

e) Hva er den matematiske betingelsen for at to gruppe-elementer skal være *konjugerte*? Hva betyr dette rent fysisk når gruppe-elementene kan tolkes som transformasjoner?

f) Inndel mengden av transformasjoner for figur **A** i konjugasjonsklasser.

g) Hva menes det med *representasjoner* for en gruppe? Hva vil det at en representasjon er *irredusibel*? Hva menes det med *karakteren* for en representasjon?

h) Hva er sammenhengen mellom antall (inekvivalente) irredusible transformasjoner og antall konjugasjonsklasser for en gruppe? Hvor mange irredusible representasjoner har transformasjonsgruppen for figur **A**? Av hvilke dimensjonaliteter må disse være?

i) Konstruer karaktertabellen for transformasjonsgruppen for figur **A**.

j) Anta at figurene først i denne oppgaven illustrerer symmetrien til tre 2-dimensjonale kvantebrønner, konstruert slik at potensialet kan regnes å være null i de markerte områdene, og uendelig utenfor. Med potensialet **A** kan systemet ha degenererte tilstander. Hva vil (generelt) skje med degenerasjonen av disse tilstandene dersom potensialet endres til å ha symmetri (*i*) som i **B**, (*ii*) som i **C**?

Oppgave 2:

Anta at vi har en ladet spinn-0 partikkel i et rotasjonssymmetrisk potensial $V(r)$, med dynamikk beskrevet av Schrödinger-ligningen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right] \Psi(\vec{r},t) \tag{1}$$

a) List opp alle rom-tid symmetriene for dette systemet, og angi de tilsvarende transformasjonslovene

$$\Psi(\vec{r},t) \to \Psi'(\vec{r},t)$$

for bølgefunksjonen.

b) Hvilke degenerasjonsgrader forventer du at man generelt skal finne i energi-spekteret i dette systemet?

c) For hydrogenlignende atomer kan potensialet $V(r)$ settes til

$$V(r) = -\frac{K_1}{r}, \tag{2}$$

der K_1 er en konstant. Da viser det seg at energinivåene er

$$E_n = -\frac{K_2}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

der K_2 er en konstant, og n'te nivå har en degenerasjonsgrad på n^2. Kan dette forklares ut fra rom-tids symmetriene i første punkt? Dvs, vil degenerasjonen av spekteret være uforandret dersom systemet perturberes med et generelt rotasjonssymmetrisk potensial $\Delta V(r)$?

d) For et harmonisk system kan potensialet $V(r)$ settes til

$$V(r) = K_3\, r^2, \tag{3}$$

der K_3 er en konstant. Da viser det seg at energinivåene er

$$E_n = \left(\frac{3}{2} + n\right) K_4, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

der K_4 er en konstant, og n'te nivå har en degenerasjonsgrad på $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Kan dette forklares ut fra rom-tids symmetriene i første punkt? Dvs, vil degenerasjonen av spekteret være uforandret dersom systemet perturberes med et generelt rotasjonssymmetrisk potensial $\Delta V(r)$?

e) Det generelle systemet (1) blir perturbert av et svakt elektrisk felt i z-retningen,

$$V(r) \rightarrow V(r) + qE\, z.$$

Forklar hvilke rom-tid symmetrier som gjenstår i dette tilfellet. Hvordan vil en opprinnelig 5-fold degenerert tilstand splitte opp?

f) Det generelle systemet (1) blir perturbert av et magnetisk felt i z-retningen,

$$\nabla \rightarrow \nabla + \frac{iqB}{2\hbar}\, \hat{e}_z \times \vec{r}.$$

Forklar hvilke rom-tid symmetrier som gjenstår i dette tilfellet. Hvordan tror du en opprinnelig 5-fold degenerert tilstand vil splitte opp?

g) Det generelle systemet (1) blir perturbert av et kubisk krystallfelt,

$$V(r) \rightarrow V(r) + \lambda \left(x^4 + y^4 + z^4\right).$$

Forklar hvilke rom-tid symmetrier som gjenstår i dette tilfellet. Hvordan vil en opprinnelig 5-fold degenerert tilstand splitte opp?

h) Hva menes med *Kramers degenerasjon*, og under hvilke betingelser vil denne inntreffe?

i) Spinn–0 partikkelen over byttes ut med et spinn–$\frac{1}{2}$ elektron. I hvilke av tilfellene over vil energi-spekteret ha Kramer's degenerasjon?

1 Noen formler som kan være til nytte

1.1 Første ortogonalitetsteorem for karakterer

$$\sum_{G\in\mathcal{G}} \chi^{(\alpha)}(G)^* \chi^{(\beta)}(G) = |\mathcal{G}|\,\delta_{\alpha\beta}, \quad \text{eller} \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{N_c} h_k\,\chi^{(\alpha)}(\mathcal{C}_k)^* \chi^{(\beta)}(\mathcal{C}_k) = |\mathcal{G}|\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{5}$$

1.2 Andre ortogonalitetsteorem for karakterer

$$\sum_{\alpha=1}^{N_r} \chi^{(\alpha)}(\mathcal{C}_i)^* \chi^{(\alpha)}(\mathcal{C}_j) = \delta_{ij}\,\frac{|\mathcal{G}|}{h_i} \tag{6}$$

1.3 Karakterene for spinn–ℓ representasjoner av $SO(3)$

$$\chi^{(\ell)}(\theta) = \frac{\sin\left((2\ell+1)\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)} \tag{7}$$

1.4 Karaktertabeller for noen punktgrupper

O	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$6C_2'$	$8C_3$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	2	0	-1
T_1	3	1	-1	-1	0
T_2	3	-1	-1	1	0

$D_{\infty h}$	E	$2C(\theta)$	$\infty\,\sigma_v$	I	$2IC(\theta)$	$\infty\,C_2'$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1
A_{1u}	1	1	-1	-1	-1	1
A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1
A_{2u}	1	1	1	-1	-1	-1
E_{1g}	2	$2\cos\theta$	0	2	$2\cos\theta$	0
E_{1u}	2	$2\cos\theta$	0	-2	$-2\cos\theta$	0
$\vdots$						
E_{ng}	2	$2\cos n\theta$	0	2	$2\cos n\theta$	0
E_{nu}	2	$2\cos n\theta$	0	-2	$-2\cos n\theta$	0