

Løsninger, innleveringsøving for MNFFY250, våren 2003

Dette er ikke en mønsterløsning, det forventes ikke like utførlige redegjørelser til eksamen. Dette er ment som et eksempel på hvordan en kan *tenke*, mer enn hvordan en bør *skrive*. Men skriv helst tilstrekkelig utførlig til at det går fram hvordan du har tenkt. Et galt resonnement som er godt forklart, vil bli mildere bedømt til eksamen enn en slurvefeil uten forklaring til!

Oppgavene fra læreboken

Kapittel 19, oppgave 38. Den tilsynelatende lysstyrken til en stjerne er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden. En stjerne som er 60 ganger for lyssvak til å være synlig for det blotte øyet kan vi (i prinsippet) gjøre synlig ved å flytte den så mye nærmere at den blir 60 ganger mer lyssterk, dvs. ved å redusere avstanden med en faktor $\sqrt{60} = 7,75$. En avstand på 2,97 parsec må vi følgelig redusere til 0,383 parsec.

For å formulere resonnementet litt mer matematisk kan vi bruke formelen

$$L = 4\pi d^2 b ,$$

der L er den totale luminositeten (luminositet er det samme som lysstyrke, utstrålt effekt, utstrålt energi pr. tid), d er avstanden, $4\pi d^2$ er arealet av et kuleskall med radius d , og b er den tilsynelatende lysstyrken (engelsk: brightness). Sammenligner vi to stjerner, som vi kaller 1 og 2, har vi da at

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \frac{b_1}{b_2} .$$

Hvis vi sammenligner to stjerner som er samme stjerne plassert i to forskjellige avstander, er altså $L_1 = L_2$, og dermed

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} .$$

Skal vi oppnå at $b_2 = 60 b_1$, må vi altså sette

$$d_2 = \frac{d_1}{\sqrt{60}} .$$

Kapittel 19, oppgave 40. Et 60-tommers teleskop samler 100 ganger så mye lys som et 6-tommers, fordi arealet av lysåpningen er 100 ganger så stort. 100 ganger så mye lys utgjør 5 størrelsesklasser, så hvis en kan se stjerner av størrelsesklasse 12 med et 6-tommers teleskop, kan en se stjerner av størrelsesklasse 17 med et 60-tommers teleskop.

Kapittel 19, oppgave 49. I det punktet der kurven merket "H" i figur 19-12 skjærer kurven merket "HeI", dvs. der de to absorpsjonslinjene er like sterke, leser jeg av anslagsvis 18 000 K på den øvre aksene, som er temperaturaksene, og sann omtrent spektraltype B3 på den nedre aksene.

Kapittel 21, oppgave 25. I følge læreboken s. 480 (eller neste oppgave) har soldiameteren økt med ca. 6 % i løpet av de siste 4,6 milliarder år, dvs. den tiden som Sola har vært å finne på hovedserien i Hertzsprung–Russell-diagrammet. Samtidig har Månen fjernet seg fra

Jorda, for tiden øker avstanden med 3,8 cm i året (se s. 218, på en milliard år blir det 38 000 km, eller 1/10 av hele avstanden). Det vil si at synsvinkelen som vi ser Sola under, var litt mindre tidligere (den øker litt mer enn 1 % pr. milliard år), samtidig som synsvinkelen til månen var større (den avtar 10 % pr. milliard år). Begge effektene bidrar til at ringformete solformørkelser var mindre vanlige tidligere enn det de er nå, fordi måneskiven lettere kunne dekke hele solskiven.

Kapittel 21, oppgave 26. Hvis solradien for 4,6 milliarder år siden var 100 %, er den nå 106 %, og det er 696 000 km. For 4,6 milliarder år siden var den følgelig

$$\frac{696\,000 \text{ km } 100}{106} = 656\,600 \text{ km} .$$

Kapittel 21, oppgave 32. Stefan–Boltzmanns lov sier at utstrålingen er proporsjonal med temperaturen i fjerde potens. For å øke utstrålingen med en faktor 2000 må vi altså øke temperaturen med en faktor $\sqrt[4]{2000} = 6,69$. Vi trenger altså en temperatur på

$$282 \text{ K } \sqrt[4]{2000} = 1886 \text{ K} .$$

Om noen har sjanse til å overleve, må det være finnene.

Kapittel 22, oppgave 23. Alderen til en planetarisk tåke kan beregnes når en kjenner ekspansjonshastigheten og diameteren. Den størrelsen som er enklest å måle med rimelig stor nøyaktighet, er radialhastigheten, dvs. hastigheten som forsiden og baksiden beveger seg med, forsiden i retning mot oss og baksiden i retning fra oss. Radialhastigheten måles ved hjelp av Doppler-forskyvningen til spektrallinjene (emisjonslinjer, kanskje også absorpsjonslinjer som er mer blåforskjøvet enn absorpsjonslinjene fra stjernens atmosfære).

Ved å måle vinkeldiameteren til hele tåken, og samtidig avstanden til den stjernen som er opphavet til tåken, finner en diameteren vinkelrett på synsretningen. Deretter antar en at ekspansjonshastigheten vinkelrett på synsretningen er den samme som den radialhastigheten en måler ut fra Doppler-forskyvningen.

Avstanden til stjernen måles med standard metoder: ut fra parallakse dersom den er nær nok, eller ut fra luminositet og tilsynelatende lysstyrke (husk at luminositet er det samme som total utstrålt effekt, vi kunne også kalle luminositeten for absolutt lysstyrke, til forskjell fra den tilsynelatende lysstyrken, som er avhengig av avstanden). Luminositeten kan være den vanskeligste størrelsen å bestemme i denne sammenhengen, men en kan i hvert fall finne overflatetemperaturen ved observasjon av spektret, og en kan ha mer eller mindre vel funderte teorier om hvor stor stjerneradialen er.

Kapittel 22, oppgave 24. Avstanden til Ringtåken i Lyren er

$$2700 \text{ lysår} = 2700 \cdot 9,47 \cdot 10^{12} \text{ km} = 2,56 \cdot 10^{16} \text{ km} .$$

Vinkeldiameteren er 1,4 bueminutt i en retning og 1,0 bueminutt i den andre retningen. Vi regner om til radianer:

$$1' = 1' \frac{\pi}{180 \cdot 60'} = 2,91 \cdot 10^{-4} .$$

Det vil si at diameteren i en retning (1,4') er

$$1,4 \cdot 2,91 \cdot 10^{-4} \cdot 2,56 \cdot 10^{16} \text{ km} = 1,04 \cdot 10^{13} \text{ km} ,$$

som er like i overkant av ett lysår. I den andre retningen ($1,0'$) er diameteren

$$1,0 \text{ } 2,91 \cdot 10^{-4} \text{ } 2,56 \cdot 10^{16} \text{ km} = 7,4 \cdot 10^{12} \text{ km} .$$

Hvis vi bruker den minste diameteren (husk at radien er halve diameteren), får vi alderen

$$\frac{3,7 \cdot 10^{12} \text{ km}}{20 \text{ km/s}} = 1,85 \cdot 10^{11} \text{ s} = \frac{1,85 \cdot 10^{11} \text{ s } 1 \text{ år}}{365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 5900 \text{ år} .$$

Med den største diameteren får vi en alder som er 1,4 ganger større, altså 8300 år.

Kapittel 22, oppgave 27. a) Supernovakandidater er først og fremst røde superkjemper, selv om SN1987A viste at også blå kjempestjerner kan bli supernovaer.

b) Av stjernene listet opp i Appendix 4 og 5 er det bare Betelgeuse og Antares som er kjempestjerner (absolutt størrelsesklasse ca. -5) og dessuten røde (spektralklasse M). De andre kjempestjernene i Appendix 5 tilhører spektralklassene A og B, med unntak av Canopus, som er spektralklasse F.

Kapittel 22, oppgave 33. a) I følge figur 22–21 s. 517 har en type II supernova en absolutt størrelsesklasse -17 , dvs. en luminositet som er ca. $6 \cdot 10^8 L_{\odot}$ ($L_{\odot}$ er luminositeten til Sola). Avstanden til Betelgeuse er 427 lysår, som er $427/32,6 = 13,10$ ganger standardavstanden på 10 parsec = 32,6 lysår. Den tilsynelatende lysstyrken er da $(427/32,6)^2 = 171,6$ ganger mindre enn i standardavstanden. Omregnet til størrelsesklasser blir det et tillegg på $5 \log_{10} 13,10 = 5,59$. Størrelsesklassen til Betelgeuse som supernova vil derfor være $-17 + 5,59 = -11,4$. Størrelsesklassen til Sola er $-26,7$, og differensen er 15,3. Siden 5 størrelsesklasser utgjør en faktor 100 i tilsynelatende lysstyrke, og størrelsesklasseskalaen er logaritmisk, betyr det at supernova Betelgeuse vil bli $(10^2)^{(15,3/5)} = 10^6$ ganger mindre lyssterk på himmelen enn Sola. Det er selvsagt mulig å regne på andre måter, f.eks. følgende. Avstanden til Betelgeuse er en faktor

$$\frac{427 \text{ lysår}}{1 \text{ AU}} = \frac{427 \cdot 9,47 \cdot 10^{12} \text{ km}}{150 \cdot 10^6 \text{ km}} = 2,70 \cdot 10^7$$

ganger større enn avstanden til Sola. Selv om en supernova i den avstanden har en luminositet som er $6 \cdot 10^8$ ganger luminositeten til Sola, så blir den tilsynelatende lysstyrken bare en faktor $6 \cdot 10^8 / (2,70 \cdot 10^7)^2 = 8,3 \cdot 10^{-7}$ så stor. Denne faktoren avviker litt fra faktoren 10^{-6} som vi beregnet ovenfor, men ikke mer enn at vi kan skylde på at vi leste av den maksimale luminositeten bare omtrentlig fra figur 22-21.

b) Siden Venus er 10^{-9} ganger så lyssterk som Sola, slutter vi at Betelgeuse som supernova vil lyse 1000 ganger så klart som Venus.

Kapittel 23, oppgave 26. Massetettheten i et nøytron er (omtrentlig regnet)

$$\rho_n = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{(4\pi/3) (10^{-15} \text{ m})^3} = 4 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3 .$$

I en nøytronstjerne er en solmasse konsentrert innenfor en radius på 10 km. Det gir en massetetthet som er (enda mer omtrentlig regnet)

$$\rho_s = \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(4\pi/3) (10^4 \text{ m})^3} = 5 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3 .$$

Altså temmelig nær det samme. Men det er helt sikkert at i sentrum av en nøytronstjerne, der trykket er størst, vil tettheten være atskillig større enn gjennomsnittstettheten.

Kapittel 23, oppgave 27. Forklaringen står i teksten: Radiopulsarer bremses ved at de stråler ut energi, ved elektromagnetisk stråling (dipolstråling, fordi en nøytronstjerne er en roterende magnetisk dipol).

Røntgenpulsarer får hele tiden overført masse, og dermed dreieimpuls, fra en annen stjerne som er like i nærheten.

Kapittel 23, oppgave 29. a) Bruk Wiens lov (forskyvningslov), se kapittel 5, s. 102: bølgelengden der strålingen er mest intens, ved en temperatur $T = 3 \cdot 10^7$ K, er gitt som

$$\lambda_{\max} = \frac{2,9 \text{ mm K}}{T} = \frac{2,9 \text{ mm K}}{3 \cdot 10^7 \text{ K}} = 10^{-10} \text{ m} .$$

Elektromagnetisk stråling med en slik bølgelengde kalles røntgenstråling.

b) Vi antar at hele overflaten har den samme temperaturen. Så bruker vi Stefan–Boltzmanns lov, som gir fluksen (utstrålt effekt pr. areal) og multipliserer med overflatearealet $4\pi R^2$, der R er radien. Det gir luminositeten:

$$L = \sigma T^4 4\pi R^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} (3 \cdot 10^7 \text{ K})^4 4\pi (10^4 \text{ m})^2 = 5,7 \cdot 10^{31} \text{ W} .$$

Luminositeten til Sola er solkonstanten 1370 W/m^2 multiplisert med arealet av et kuleskall med radius en astronomisk enhet,

$$L_{\odot} = 1370 \text{ W/m}^2 4\pi (1,50 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ W} .$$

Luminositeten av et røntgenutbrudd er altså 150 000 ganger luminositeten av Sola. Omtrent det samme som luminositeten av en nova, men 1/10000 av luminositeten til en supernova av type Ia.

Kapittel 23, oppgave 30. a) En grunn til at RXJ185635-3574 ikke er en pulsar, kan være at den er så gammel at den har mistet mye av både dreieimpulsen og magnetfeltet. En annen mulig grunn kunne naturligvis være at pulsene eksisterer, men ikke treffer Jorda.

b) For en overflatetemperatur på $T = 600\,000$ K finner vi, i følge Wiens lov, at bølgelengden med mest intens stråling er

$$\lambda_{\max} = \frac{2,9 \text{ mm K}}{T} = \frac{2,9 \text{ mm K}}{600\,000 \text{ K}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m} .$$

Elektromagnetisk stråling med en slik bølgelengde er røntgenstråling (nær det ultrafiolette området). Når hele overflaten har samme temperatur, er strålingen konstant og ikke pulset.

c) Overflatetemperaturen er 100 ganger så høy som på Sola, derfor stråles det $100^4 = 10^8$ ganger så mye pr. areal som fra Sola. Når den totale strålingen likevel er bare 4,6 % så mye som strålingen fra Sola, så må overflaten være $4,6 \cdot 10^{-10}$ av overflatearealet av Sola, og radien må være $\sqrt{4,6 \cdot 10^{-10}} = 2,1 \cdot 10^{-5}$ av solradien, dvs. 15 km. Da vet vi ikke om så mange andre muligheter enn at det er en nøytronstjerne. Hvorfor ikke en vanlig asteriode, altså en stor stein? Jo, en stein med en temperatur på 600 000 K ville avkjøles svært raskt. Den stråler ut nesten 5 % så mye energi pr. tid som Sola, dvs. $2 \cdot 10^{24}$ W, og det har den utvilsomt gjort i

mange år. For å kunne stråle i bare ett år, og likevel avkjøles mindre enn, la oss si, 100 000 K, måtte den ha en varmekapasitet på

$$C = \frac{2 \cdot 10^{24} \text{ W} \cdot 1 \text{ år}}{10^5 \text{ K}} = \frac{2 \cdot 10^{24} \text{ W} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}{10^5 \text{ K}} = 6 \cdot 10^{26} \text{ J/K} .$$

Varmekapasiteten pr. partikkel er, grovt regnet, lik Boltzmanns konstant $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, derfor må antallet partikler være minst $C/k_B = 4 \cdot 10^{49}$, og ganske sikkert noen størrelsesordener mer. Massen pr. partikkel er rimeligvis minst lik protonmassen $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, slik at hele denne nøytronstjerneekandidaten har en masse på minst $4 \cdot 10^{49} m_p = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Dermed er tettheten minst

$$\frac{7 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(4\pi/3) (1,4 \cdot 10^4 \text{ m})^3} = 6 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^3 .$$

Husk at dette er en nedre grense, og at den virkelige tettheten nok er mange størrelsesordener større. Dermed kan vi være ganske sikre på at vi har å gjøre med en nøytronstjerne.

De andre oppgavene

1a) Bruk Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} ,$$

der P er omløpsperioden, a er avstanden mellom stjernene (mer presist: a er middelveiden av største og minste avstand, som er det samme som største halvakse i den elliptiske banen som den ene stjernen følger rundt den andre), og m_1 og m_2 er de to massene.

Sammenligner vi med Jordas bane rundt Sola, der perioden er 1 år, mens avstanden er 1 AU = 1 astronomisk enhet = 150 millioner kilometer, og summen av massene er solmassen $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ (fordi jordmassen er neglisjerbar), så får vi at

$$\left(\frac{P}{1 \text{ år}}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{m_1 + m_2}\right) \left(\frac{a}{1 \text{ AU}}\right)^3$$

dvs. at

$$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \left(\frac{1 \text{ år}}{P}\right)^2 \left(\frac{a}{1 \text{ AU}}\right)^3 = \frac{24^3}{79,9^2} = 2,17 .$$

Summen av massene er 2,17 solmasser.

Denne måten å regne på er absolutt den enkleste, og gir svaret i en fornuftig enhet, nemlig i antall solmasser. Men det er selvfølgelig fullt mulig å regne ut svaret direkte i kilogram:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 (24 \cdot 150 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} (79,9 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2} = 4,34 \cdot 10^{30} \text{ kg} .$$

1b) Vi må først beregne omløpsperioden, som er omkretsen av en sirkel dividert med hastigheten:

$$P = \frac{2\pi \cdot 26 \cdot 000 \text{ lysår}}{220 \text{ km/s}} = \frac{2\pi \cdot 26 \cdot 000 \cdot 300 \cdot 000 \text{ km/s år}}{220 \text{ km/s}} = 2,23 \cdot 10^8 \text{ år}$$

For å bruke formelen ovenfor til å beregne massen, må vi dessuten uttrykke avstanden til sentrum av Melkeveien i astronomiske enheter:

$$\begin{aligned} a &= 26\,000 \text{ lysår} = 26\,000\,300\,000 \text{ (km/s) år} = 26\,000\,300\,000 \text{ km/s } 365,25\,24\,3600 \text{ s} \\ &= 2,46 \cdot 10^{17} \text{ km} = 2,46 \cdot 10^{17} \text{ km} \frac{1 \text{ AU}}{150 \cdot 10^6 \text{ km}} = 1,64 \cdot 10^9 \text{ AU} . \end{aligned}$$

Massen M i Melkeveien innenfor Solas bane skulle da være gitt av ligningen

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{1 \text{ år}}{P} \right)^2 \left(\frac{a}{1 \text{ AU}} \right)^3 = \frac{(1,64 \cdot 10^9)^3}{(2,23 \cdot 10^8)^2} = 8,9 \cdot 10^{10} .$$

Etter dette regnestykket skulle det finnes ca. 100 milliarder stjerner i Melkeveien nærmere sentrum enn vi befinner oss. Siden tettheten av stjerner er størst inn mot sentrum, vil dette trolig være en nokså stor andel av det totale antallet.

Denne metoden til å måle massen av Melkeveien ville ha vært helt korrekt dersom massefordelingen i Melkeveien var fullstendig kulesymmetrisk. Da ville gravitasjonen fra Melkeveien virke på solsystemet som om massen M innenfor en radius på 26 000 lysår var samlet i sentrum, og dessuten ville gravitasjonskreftene fra massen som befinner seg mer enn 26 000 lysår fra sentrum, summeres opp til null. Ingen av disse to konklusjonene holder eksakt, fordi massefordelingen ikke er kulesymmetrisk, men skiveformet. Spesielt impliserer skiveformen at den massen som er utenfor solsystemet, trekker utover, bort fra sentrum. Til gjengjeld vil massen som er innenfor, trekke mer innover enn om fordelingen var kulesymmetrisk.

2) Avstanden er

$$d = 4,39 \text{ lysår} = 4,39 \text{ lysår} \frac{1 \text{ parsec}}{3,26 \text{ lysår}} = 1,347 \text{ parsec} .$$

Parallaksen er

$$\alpha = 1 \text{ buesekund} \frac{1 \text{ parsec}}{d} = 1 \text{ buesekund} \frac{1}{1,347} = 0,743 \text{ buesekund} = 0,743'' .$$

Vi kan også bruke direkte definisjonen, at parallaksen er en astronomisk enhet dividert med avstanden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 \text{ AU}}{d} = \frac{1 \text{ AU}}{4,39 \text{ lysår}} = \frac{150 \cdot 10^6 \text{ km}}{4,39 \cdot 300\,000 \text{ km/s } 365,25\,24\,3600 \text{ s}} \\ &= \frac{150 \cdot 10^6 \text{ km}}{4,39 \cdot 9,47 \cdot 10^{12} \text{ km}} = 3,61 \cdot 10^{-6} . \end{aligned}$$

Dette er parallaksen i radianer. Nå er π radianer lik 180 grader, slik at

$$3,61 \cdot 10^{-6} = 3,61 \cdot 10^{-6} \frac{180 \cdot 3600''}{\pi} = 3,61 \cdot 10^{-6} \cdot 206\,265'' = 0,744'' .$$

Den absolutte størrelsesklassen er størrelsesklassen omregnet til en standard avstand av 10 lysår. Når størrelsesklassen er m for en stjerne i avstanden d , er den absolutte størrelsesklassen gitt som

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ parsec}} \right) .$$

Hvordan kommer vi fram til denne formelen? For det første: størrelsesklassen m varierer lineært med logaritmen av den tilsynelatende lysstyrken (det som kalles “apparent brightness” i læreboken). For det andre: en faktor på 10 i avstanden utgjør en faktor på 100 (eller rettere $1/100$) i lysstyrken, som pr. definisjon tilsvarer en forskjell på 5 størrelsesklasser; det bestemmer faktoren 5 i formelen når vi bruker logaritmen med basis 10. For det tredje: hvis avstanden d f.eks. er større enn 10 parsec, så ser stjernen lyssvakere ut enn om den var i standardavstanden 10 parsec, og da er den observerte størrelsesklassen m større enn den absolutte størrelsesklassen M , det bestemmer fortegnet – i formelen. Når $d = 1,347$ parsec, så er

$$5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ parsec}} \right) = 5 \log_{10} 0,1347 = -4,35 .$$

De absolutte størrelsesklassene for de to stjernene er derfor $-0,01+4,35 = 4,34$ og $1,33+4,35 = 5,68$. Den første har større luminositet enn Sola (som har absolutt størrelsesklasse 4,8), og faktoren er

$$100^{(4,8-4,34)/5} = 100^{0,092} = 10^{0,184} = 1,53 .$$

Den andre har mindre luminositet enn Sola, og faktoren er

$$100^{(4,8-5,68)/5} = 100^{-0,176} = 10^{-0,352} = 0,44 .$$

Så var det formelen for vinkeloppløsningen θ til et teleskop med lysåpning (som regel speildiameter) D , se læreboken s. 132 (der benevnningen vinkelsekunder er underforstått),

$$\theta = 250\,000'' \frac{\lambda}{D} = 250\,000'' \frac{1 \text{ radian}}{206\,265''} \frac{\lambda}{D} = 1,2 \frac{\lambda}{D} .$$

Her er $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m bølgelengden av lyset. Som vi her ser, blir formelen enklere, i den forstand at proporsjonalitetskonstanten som inngår er praktisk talt lik 1, når en regner vinkelen i radianer i stedet for i buesekunder.

Synsvinkelen β mellom de to stjernene er (omtrent) lik avstanden mellom dem, 24 AU, dividert med avstanden $d = 1 \text{ AU}/\alpha$, der α er parallaksen. Altså,

$$\beta = \frac{24 \text{ AU}}{d} = \frac{24 \text{ AU}}{1 \text{ AU}} \alpha = 24 \alpha = 24 \cdot 3,61 \cdot 10^{-6} = 8,7 \cdot 10^{-5} = 8,7 \cdot 10^{-5} \cdot 206\,265'' = 17,9'' .$$

For å kunne se de to stjernene hver for seg, må en ha et teleskop med vinkeloppløsning θ mindre enn vinkelen β , altså med lysåpning

$$D > \frac{1,2 \lambda}{\beta} = \frac{1,2 \lambda}{8,7 \cdot 10^{-5}} = 13\,900 \lambda = 13\,900 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 7,0 \text{ mm} .$$

Siden pupillen i øyet måler kanskje 5 mm i mørket, betyr det at de to stjernene nesten kan skjernes uten teleskop, med bare øyet.

3) Lyset fra HII emisjonståker (Orion-tåken) består av enkelte spektrallinjer, og det er gjerne rødt, fordi det domineres av spektrallinjen H_α , som kommer fra overgangen fra 2. eksiterte tilstand ($n = 3$) til 1. eksiterte tilstand ($n = 2$) i hydrogenatomet.

Lyset fra refleksjonståker (som omgir Pleiadene) er reflektert stjernelys, og har derfor et kontinuerlig spektrum med absorpsjonslinjer. Det er gjerne blått, fordi korte bølgelengder (blått lys) reflekteres mer effektivt enn lange bølgelengder (rødt lys). Det skyldes at atomene

som sprer lyset, er mye mindre enn bølgelengden av lyset. Spredning av bølger mot en hindring (f.eks. vannbølger mot en stake som står opp av vannet) er mest effektiv når bølgelengden er sammenlignbar med, eller mindre enn, den hindringen som bølgene spres mot. En annen grunn til at refleksjonstårer ser blå ut, kan være at de stjernene som lyser dem opp, ofte er blå kjempestjerner.

4) For å bruke virialteoremet skal vi strengt tatt kjenne tidsmidlet av kinetisk og potensiell energi. Vi har ikke tid til å sitte og observere galaksene over hundrevis av millioner år for å finne tidsmidlene. Men det er kanskje ikke helt urimelig å tenke at når vi observerer en galaksehopp nettopp nå, så er det å betrakte som et tilfeldig valgt tidspunkt, og den verdien som vi observerer nettopp nå, på det tilfeldig valgte tidspunktet, vil sannsynligvis ligge i nærheten av tidsmidlet. Vi postulerer derfor at $2E_K = -V$, der E_K og V er den kinetiske og potensielle energi som vi observerer nå.

Vi observerer bare den ene hastighetskomponenten, nemlig komponenten langs synsretningen, men igjen antar vi at denne retningen er representativ, slik at vi ville måle (omtrent) samme σ_r^2 dersom vi kunne måle de to andre ortogonale hastighetskomponentene. Derfor postulerer vi at $E_K = (3/2)m\sigma_r^2$, med en faktor 3 fordi hastigheten $\mathbf{v}_i$ av en galakse har 3 komponenter. Det gir at

$$3M\sigma_r^2 = \frac{GM^2}{R} ,$$

dvs. at

$$M = \frac{3R\sigma_r^2}{G} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ lysår} (750 \text{ km/s})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} .$$

Siden et lysår er

$$300\,000 \text{ km/s} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 9,47 \cdot 10^{15} \text{ m} ,$$

finner vi at

$$M = 1,2 \cdot 10^{45} \text{ kg} .$$

Siden solmassen er $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, blir massen av galaksehopen $6 \cdot 10^{14}$ solmasser. Sier vi (se oppgave 1b) at en typisk galakse inneholder 10^{11} solmasser, burde altså en slik galaksehopp inneholde 6000 galakser, innenfor en radius på 5 millioner lysår, dvs. et volum på

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = 5 \cdot 10^{20} (\text{lysår})^3 .$$

Volumet pr. galakse blir $1/6000$ av dette, dvs. at avstanden mellom hver galakse skulle bli omtrent $5 \cdot 10^6 \text{ lysår} / \sqrt[3]{6000} = 280\,000 \text{ lysår}$, som ville si at galaksene nesten måtte berøre hverandre. Altså er 6000 galakser et urimelig stort antall. Dette illustrerer ett av eksemplene på såkalt “mørk materie”, nemlig at galaksehopper ser ut til å inneholde flere ganger så mye masse som det som finnes tilsammen i galaksene der.

5) For en ideal gass ved konstant temperatur T er trykket P proporsjonalt med tettheten ρ ,

$$P = \frac{\rho k_B T}{\bar{m}} .$$

Ligningen for hydrostatisk likevekt gir da at

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{\bar{m} P g}{k_B T} = -\alpha P ,$$

der α er konstant når temperaturen er konstant,

$$\alpha = \frac{\overline{m} g}{k_B T} .$$

Dette er en separabel differensialligning, vi kan skrive den som

$$\frac{dP}{P} = -\alpha dz ,$$

da kan den integreres direkte, og løsningen er

$$\ln P - \ln P_0 = -\alpha(z - z_0) ,$$

der P_0 og z_0 er integrasjonskonstanter. For en førsteordens ligning som denne skal vi som kjent ha en integrasjonskonstant, ikke to, og det er nettopp det vi har, men den ene konstanten velger vi å skrive som $\ln P_0 + \alpha z_0$. Eksponensiering gir at

$$P = P_0 e^{-\alpha(z-z_0)} .$$

Luft består av rundt regnet 80 % nitrogen (N_2 , massetall $2 \cdot 14 = 28$) og 20 % oksygen (O_2 , massetall $2 \cdot 16 = 32$). Gjennomsnittlig masse for et luftmolekyl er følgelig (omtrentlig regnet, der $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg er atommasseenheten, praktisk talt identisk med protonmassen m_p)

$$\overline{m} = (0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32) u = 28,8 u = 28,8 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg} .$$

Den numeriske verdien for konstanten α , hvis vi setter temperaturen (litt tilfeldig) lik 283 K, altså 10 grader Celsius, blir

$$\alpha = \frac{\overline{m} g}{k_B T} = \frac{4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 283 \text{ K}} = 1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m} .$$

Hvis vi velger z_0 som havnivået, så er altså $P_0 = 1$ atmosfære. For Galdhøpiggen har vi at $z - z_0 = 2469$ m, og trykket der er

$$P = P_0 e^{-(1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m}) \cdot 2469 \text{ m}} = P_0 e^{-0,2963} = 0,744 P_0 .$$

Tilsvarende for de to andre fjelltoppene,

$$P = P_0 e^{-(1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m}) \cdot 4807 \text{ m}} = P_0 e^{-0,5768} = 0,562 P_0 ,$$

og

$$P = P_0 e^{-(1,20 \cdot 10^{-4} / \text{m}) \cdot 8848 \text{ m}} = P_0 e^{-1,0618} = 0,346 P_0 .$$

6) Vekten av den loddrette luftsøylen over 1 m² av jordoverflaten er 10^5 N. Vekten er mg , der m er massen og $g = 9,8 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$ er tyngdens akselerasjon. Massen av denne luftsøylen er altså 10^4 kg. Jordradien er $R = 6378$ km, og det totale arealet av jordoverflaten er

$$4\pi R^2 = 5,112 \cdot 10^8 \text{ km}^2 = 5,112 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 .$$

Massen av jordatmosfæren blir da $5,11 \cdot 10^{18}$ kg.

Sammenlignet med hele jordmassen på $5,974 \cdot 10^{24}$ kg blir det en andel på $8,56 \cdot 10^{-7}$.

7) For atmosfæren til Mars bruker vi den samme formelen som for jordatmosfæren,

$$P = P_0 e^{-\alpha(z-z_0)} .$$

Men konstanten

$$\alpha = \frac{\overline{m} g}{k_B T}$$

har nå en litt annen numerisk verdi. Atmosfæren til Mars inneholder 95 % CO₂, så vi regner som om den besto av bare CO₂. Molekylvekten av CO₂ er 12 + 2 · 16 = 44, slik at gjennomsnittsmassen av et molekyl er

$$\overline{m} = 44 \text{ u} = 44 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 7,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg} .$$

Tyngdens akselerasjon er $g = 3,8 \text{ m/s}^2$ (sammenlignet med Jorda er massen 0,107 og radien 0,533, slik at tyngdens akselerasjon på Mars sammenlignet med på Jorda blir $0,107/0,533^2 = 0,38$). Temperaturen varierer mye mellom dag og natt, bruker vi middeltemperaturen $T = 220 \text{ K}$, får vi at

$$\alpha = \frac{\overline{m} g}{k_B T} = \frac{7,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot 3,8 \text{ m/s}^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 220 \text{ K}} = 9,1 \cdot 10^{-5} / \text{m} .$$

Med en høydeforskjell på $z - z_0 = 31 \text{ km}$ finner vi da at

$$P = P_0 e^{-(9,1 \cdot 10^{-5} / \text{m}) \cdot 31\,000 \text{ m}} = P_0 e^{-2,82} = 0,060 P_0 .$$

Trykket på toppen av Olympus Mons er 6 % av trykket i det laveste punktet på Mars.

8) Selv om det blåser kraftig, vil trykket utlignes praktisk talt fullstendig, slik at betingelsen for hydrostatisk likevekt vil gjelde,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g .$$

Luft som beveger seg fra Dovre ned mot Trondheim vil trykkes sammen, fordi lufttrykket øker nedover. Hvis sammentrykningen skjer adiabatisk, er altså $P = K \rho^\gamma$, der K er en konstant. Det vil si at

$$\frac{dP}{dz} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dz} .$$

Disse to ligningene tilsammen gir at

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho g}{\gamma K \rho^{\gamma-1}} = -\frac{g}{\gamma K \rho^{\gamma-2}} .$$

Som vi omskriver til

$$\gamma K \rho^{\gamma-2} d\rho = -g dz .$$

Integrasjon gir så at

$$\frac{\gamma K \rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = -g (z - z_0) ,$$

der z_0 er en integrasjonskonstant. Vi setter inn først $K \rho^\gamma = P$, det gir at

$$\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho} = -g (z - z_0) .$$

Deretter setter vi inn $P/\rho = k_B T / \overline{m}$, det gir at

$$\frac{\gamma k_B T}{(\gamma-1)\overline{m}} = -g (z - z_0) ,$$

eller ekvivalent,

$$T = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\overline{m}g(z - z_0)}{k_B} = -\frac{2}{5} \frac{4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg } 9,8 \text{ m/s}^2 (z - z_0)}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} = -(1,36 \cdot 10^{-2} \text{ K/m}) (z - z_0) .$$

Hvis temperaturen ved $z = z_1 = 1100 \text{ m}$ er T_1 , og temperaturen ved $z = z_2 = 100 \text{ m}$ er T_2 , så er temperaturdifferensen

$$T_2 - T_1 = -(1,36 \cdot 10^{-2} \text{ K/m}) (z_2 - z_1) = -(1,36 \cdot 10^{-2} \text{ K/m}) (-1000 \text{ m}) = 13,6 \text{ K} .$$

Hvis alle opp- og nedgående luftstrømmer i atmosfæren var adiabatisk, så skulle, i følge vårt lille regnestykke, temperaturen avta med en grad for hver 70 meter over havet. Men mange ganger ligger jo lufta stille, slik at temperaturene utjevnes. Derfor er det forståelig at den virkelige temperaturgradienten blir mindre.

Vårt regnestykke forteller forresten også at den kritiske temperaturgradienten for konveksjon i atmosfæren er ca. en grad for hver 70 meter. Følgelig vil det ikke foregå konveksjon når temperaturgradienten er en grad for hver 120 meter over havet. Men det trengs ikke særlig mye oppvarming ved bakken en sommerdag med sol, før temperaturgradienten blir større (i absoluttverdi) enn en grad pr. 70 meter, og da kan varm luft stige fra bakken og flere kilometer opp, slik at det oppstår cumulus-skyer.