NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag SIF4047 Anvendt kvantemekanikk
Onsdag 8. mai 2002
Tid: 09.00–15.00

Sensurfrist: Onsdag 29. mai 2002

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Noen nyttige konstanter	
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Elementærladningen:	$e = 1,602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Finstrukturkonstanten:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137,036$
Elektronmassen:	$m_\mathrm{e} = 9,109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,511\,\mathrm{MeV}/c^2$
Bohr-radien for hydrogen:	$a_0 = \hbar/(\alpha m_\mathrm{e} c) = 0,529\,\mathrm{Å}$

Oppgave 1:

Hamilton-operatoren for et elektron i et ytre magnetfelt med flukstetthet $\vec{B}$ er

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + \frac{e}{m}\,\vec{S} \cdot \vec{B}\ .$$

Elektronet har ladning $-e$, masse $m = m_e$, impuls $\vec{p}$ og spinn $\vec{S}$.
Vi antar her at magnetfeltet er homogent i rommet og konstant i tiden. Vi legger z-aksen langs magnetfeltet og velger vektorpotensialet $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ slik at det har komponenter

$$A_x = -\frac{By}{2}\ , \qquad A_y = \frac{Bx}{2}\ , \qquad A_z = 0\ ,$$

med $B > 0$.

a) Vis at

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{8}\, m\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\omega}{2}\,(L_z + 2S_z) \ ,$$

når vi innfører syklotronfrekvensen $\omega = eB/m$ og z-komponenten av dreieimpulsen, $L_z = xp_y - yp_x$. Merk at $\omega > 0$.
Forklar hvordan vi kan løse dette tredimensjonale problemet ved å løse det todimensjonale problemet der Hamilton-operatoren er

$$H' = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{8}\, m\omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\omega}{2}\,(L_z + 2m_s\hbar) \ .$$

Her er $m_s = \pm 1/2$ kvantetallet for z-komponenten av spinnet, S_z.
Den verdien av spinn-kvantetallet som gir lavest energi, er $m_s = -1/2$, derfor antar vi i resten av denne oppgaven (og i neste oppgave) at $m_s = -1/2$.

b) Vis at hvis vi innfører de komplekse koordinatene $u = x - \mathrm{i}y$, $u^* = x + \mathrm{i}y$, og definerer

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \ , \qquad \frac{\partial}{\partial u^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \ ,$$

så blir

$$L_z = \hbar\left(u^*\,\frac{\partial}{\partial u^*} - u\,\frac{\partial}{\partial u}\right) ,$$

og når vi setter $m_s = -1/2$, blir

$$H' = -\frac{2\hbar^2}{m}\,\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial u^*} + \frac{1}{8}\, m\omega^2\,|u|^2 + \frac{\omega}{2}\,(L_z - \hbar) \ .$$

c) Vis at bølgefunksjonene

$$\psi_n(x,y) = \mathcal{N}_n\,(x - \mathrm{i}y)^n\,\mathrm{e}^{-\gamma(x^2+y^2)} = \mathcal{N}_n\,u^n\,\mathrm{e}^{-\gamma|u|^2} \ , \tag{1}$$

der γ er konstant og der $n = 0, 1, 2, \ldots$, er egentilstander for L_z med egenverdier $-n\hbar$.
Vis at hvis vi velger en passende verdi for γ, så er disse bølgefunksjonene også egentilstander for H'. Finn egenverdiene.
Vis at de samme bølgefunksjonene er ortonormale dersom vi velger normeringskonstantene

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{(2\gamma)^{n+1}}{\pi n!}} \ .$$

Skisser hvordan sannsynlighetstettheten $|\psi_n|^2$ varierer med radien $r = |u| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
For hvilken verdi av r er $|\psi_n|^2$ maksimal?

Oppgitt integral:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}w\; w^n\,\mathrm{e}^{-\alpha w} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \ .$$

(Kommentar: Energinivåene til et elektron i et homogent magnetfelt kalles *Landau-nivå*. De er degenererte, og antallet tilstander i hvert Landau-nivå er proporsjonalt med den totale magnetiske fluksen $B\mathcal{A}$, der $\mathcal{A}$ er arealet.
Alle bølgefunksjonene $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ tilhører grunntilstanden, som altså er uendelig degenerert når vi antar at systemet har uendelig stort areal. Det forlanges ikke bevis for at disse tilstandene er de som har lavest energi.)

Oppgave 2:

I denne oppgaven ser vi også på elektroner som beveger seg i to dimensjoner i et homogent og konstant magnetfelt.

En to-dimensjonal elektrongass kan realiseres eksperimentelt ved lav temperatur (rundt 1 K) ved at elektronene fanges opp på en overflate, f.eks. mellom to halvledere. Med et magnetfelt normalt på overflaten (i z-retning) og et elektrisk felt langs overflaten (i x-retning) måles en strøm I (i y-retning), og en kan definere *Hall-resistansen* som

$$R_H = \frac{\Phi}{I} \,,$$

der Φ er den elektriske potensialdifferensen. Når den magnetiske flukstettheten B øker, øker R_H omtrent proporsjonalt med B, men for sterke felt observeres en rekke *platå* der R_H er konstant. Verdien av R_H på et platå er kvantisert som

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2} \,,$$

der h er Plancks konstant, e er elementærladningen og ν er en numerisk faktor. I den *heltallig kvantiserte Hall-effekten* er $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. I den *fraksjonelt kvantiserte Hall-effekten* er ν en spesiell brøk som for eksempel 1/3, 1/5, 2/5, og så videre.
En fysisk tolkning er at ν er en *fyllingsfraksjon*, dvs. at i en forenklet modell med en fri elektrongass er ν lik antallet Landau-nivå fylt opp av elektroner. For eksempel er $\nu = 1$ dersom alle elektrontilstandene med lavest energi er besatte og alle eksiterte tilstander er ubesatte.

Vi kan bruke en-partikkelbølgefunksjonene ψ_n gitt i ligning (1) til å konstruere bølgefunksjoner for N elektroner. For $N = 2$ og $N = 3$, eksempelvis, definerer vi Slater-determinantene

$$\psi_{mn}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \psi_m(1) & \psi_n(1) \\ \psi_m(2) & \psi_n(2) \end{vmatrix}$$

og

$$\psi_{kmn}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_k(1) & \psi_m(1) & \psi_n(1) \\ \psi_k(2) & \psi_m(2) & \psi_n(2) \\ \psi_k(3) & \psi_m(3) & \psi_n(3) \end{vmatrix} \,.$$

Her er f.eks. $\psi_{mn}(1,2)$ en forkortet skrivemåte for $\psi_{mn}(x_1, y_1, x_2, y_2)$, og (x_j, y_j) er posisjonen til elektron nr. j. Banedreieimpulsen for N-elektronsystemet har z-komponenten

$$L_z = \sum_{j=1}^{N} L_{jz} = \sum_{j=1}^{N} \hbar \left(u_j^* \frac{\partial}{\partial u_j^*} - u_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) .$$

Hvis vi ser bort fra vekselvirkningen mellom elektronene, er energien (i to dimensjoner)

$$H^0 = \sum_{j=1}^{N} H_j^0 = \sum_{j=1}^{N} \left(-\frac{2\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial u_j \, \partial u_j^*} + \frac{1}{8} m\omega^2 \, |u_j|^2 + \frac{\omega}{2} \left(L_{jz} - \hbar \right) \right) .$$

a) Vis at

$$\psi_{mn} = f_{mn}(u_1, u_2)\ \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)}$$

og

$$\psi_{kmn} = f_{kmn}(u_1, u_2, u_3)\ \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2)}\ ,$$

der $f_{mn}(u_1, u_2)$ og $f_{kmn}(u_1, u_2, u_3)$ er polynomer i de komplekse variablene $u_j = x_j - \mathrm{i}y_j$.
Hvilke verdier har L_z og H^0 i tilstandene ψ_{mn} og ψ_{kmn}?

b) Laughlin forklarte den fraksjonelt kvantiserte Hall-effekten med $\nu = 1/3$, for eksempel, ved at N-elektronsystemet kan beskrives med god tilnærming av en bølgefunksjon som har formen

$$\psi_N^L = \mathcal{N}_N^L \left(\prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^{N} (u_i - u_j)^3 \right) \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2+\cdots+|u_N|^2)}\ .$$

der $\mathcal{N}_N^L$ er en normeringsfaktor. De aller enkleste eksemplene er

$$\begin{aligned} \psi_2^L &= \mathcal{N}_2^L\ (u_1 - u_2)^3\ \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2)} \\ \psi_3^L &= \mathcal{N}_3^L\ (u_1 - u_2)^3\ (u_1 - u_3)^3\ (u_2 - u_3)^3\ \mathrm{e}^{-\gamma(|u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2)}\ . \end{aligned}$$

Laughlins bølgefunksjoner ψ_N^L er gode eksempler på at ikke alle kvantemekaniske mangepartikkeltilstander kan tilnærmes særlig godt med en enkelt Slater-determinant.
For eksempel finner en at ψ_3^L kan uttrykkes ved Slater-determinantene ψ_{kmn} som

$$\psi_3^L = \frac{1}{\sqrt{31}} \left(-\psi_{036} + \sqrt{6}\ \psi_{045} + \sqrt{3}\ \psi_{126} - \sqrt{6}\ \psi_{135} + \sqrt{15}\ \psi_{234}\right)\ .$$

Utled den tilsvarende (enklere) formelen for ψ_2^L uttrykt ved Slater-determinantene ψ_{mn}.
Bevis for den oppgitte formelen for ψ_3^L forlanges ikke.
Hvilke verdier har L_z og H^0 i Laughlin-tilstandene ψ_N^L?

c) Hva er sannsynligheten for å observere et elektron i en gitt en-elektrontilstand ψ_j dersom $N = 2$, og de to elektronene er i tilstanden ψ_{mn}?
Enn dersom vi har to elektroner i Laughlin-tilstanden ψ_2^L?
Dersom vi har tre elektroner i tilstanden ψ_{kmn}?
Dersom vi har tre elektroner i Laughlin-tilstanden ψ_3^L?
Laughlin viste at i grensen $N \to \infty$ vil tilstanden ψ_N^L gi sannsynlighet $1/3$ for hver av en-elektrontilstandene ψ_j med $j = 0, 1, 2, \ldots$.
Er $N = 2$ eller $N = 3$ en god tilnærming til $N = \infty$?
Beregn antallstettheten av elektroner, $n(x, y)$, i det tilfellet at sannsynligheten er $1/3$ for å finne et elektron i en-elektrontilstanden ψ_j, for alle $j = 0, 1, 2, \ldots$.

d) Modellen ovenfor med N frie elektroner i et konstant ytre magnetfelt (dvs. N elektroner som ikke vekselvirker innbyrdes) er ufullstendig, fordi den ikke tar i betraktning Coulomb-frastøtningen mellom elektronene. Laughlin fant ved numeriske beregninger at når en tar hensyn til Coulomb-frastøtningen (og kvantiserer L_z til samme verdi som for ψ_N^L), så er tilstanden ψ_N^L en god tilnærming til den eksakte grunntilstanden.
Hvilken egenskap ved bølgefunksjonene ψ_N^L er det som gjør at Coulomb-energien er liten i en slik tilstand?

Oppgave 3:

Vi definerer Fourier-komponentene $\vec{A}_{\vec{k}}$ av det elektromagnetiske vektorpotensialet $\vec{A}(\vec{r})$ ved at

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{A}_{\vec{k}} \; .$$

Vi antar f.eks. periodiske randkrav på $\vec{A}(\vec{r})$ i et endelig normeringsvolum $\mathcal{V}$, slik at bølgetallsvektoren $\vec{k}$ blir en diskret variabel. Vi skriver $k = |\vec{k}|$.
Når vi kvantiserer det elektromagnetiske feltet, blir $\vec{A}_{\vec{k}}$ en operator,

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck\mathcal{V}}} \left(a_{\vec{k},\lambda} + a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda} \right) .$$

Polarisasjonsvektorene $\vec{e}_{\vec{k},\lambda}$ velges slik at $\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{k},\lambda} = 0$ og $\vec{e}_{\vec{k},\lambda} = \vec{e}_{-\vec{k},\lambda}$.
Annihilasjonsoperatorene $a_{\vec{k},\lambda}$ og skapelsesoperatorene $a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}$ oppfyller de kanoniske kommutasjonsrelasjonene

$$\left[a_{\vec{k},\lambda}\, ,\, a_{\vec{k}',\lambda'}\right] = \left[a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\, ,\, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\right] = 0 \; , \qquad \left[a_{\vec{k},\lambda}\, ,\, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\, \delta_{\lambda,\lambda'} \; .$$

Den magnetiske flukstettheten $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ har Fourier-komponentene

$$\vec{B}_{\vec{k}} = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} \; .$$

Det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ har Fourier-komponentene

$$\vec{E}_{\vec{k}} = \mathrm{i} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} \left(a_{\vec{k},\lambda} - a^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda} \right) .$$

a) Vis at $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ og $\vec{E}(\vec{r})$ alle er hermiteske operatorer.

b) Vis at alle Fourier-komponentene til $\vec{A}(\vec{r})$ kommuterer innbyrdes.
Mer presist: la $\vec{m}$ og $\vec{n}$ være vilkårlige enhetsvektorer, og vis at for vilkårlige bølgetallsvektorer $\vec{k}$ og $\vec{k}'$ er

$$\left[\vec{m}\cdot\vec{A}_{\vec{k}}\, ,\, \vec{n}\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\right] = 0 \; .$$

c) Undersøk også kommutatorene

$$\left[\vec{m}\cdot\vec{E}_{\vec{k}}\, ,\, \vec{n}\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\right]$$

og

$$\left[\vec{m}\cdot\vec{E}_{\vec{k}}\, ,\, \vec{n}\cdot\vec{B}_{\vec{k}'}\right] .$$

Hva med kommutatoren

$$\left[\vec{m}\cdot\vec{B}_{\vec{k}}\, ,\, \vec{n}\cdot\vec{A}_{\vec{k}'}\right] \; ?$$

Er det mulig å lage et elektromagnetisk felt innenfor det gitte volumet med vilkårlig stor nøyaktighet? Det vil si: slik at både det elektriske feltet og den magnetiske flukstettheten har verdier som er spesifisert overalt med hvor stor nøyaktighet som helst?