UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
P. C. Hemmer
Tel. 3648

EKSAMEN I FAG 74993 IKKE-LINEÆR DYNAMIKK
Torsdag 9. mai 1996
kl. 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel formler er gitt i eget vedlegg.

Oppgave 1

a) La $u(x,t)$ tilfredsstille Korteweg-de Vries-likningen i følgende dimensjonsløse form:

$$u_t - 6u\ u_x + u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

Bevis at tyngdepunktet

$$X_T = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\ u(x,t)\ dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\ dx}$$

beveger seg med konstant fart.

b) Vi vil la $u(x,t)$ fra punkt a) være potensial og λ egenverdi for eventuelle bundne tilstander i den stasjonære Schrödingerlikningen

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u\ \psi = \lambda\ \psi. \tag{2}$$

La et startprofil $u(x,0)$ utvikle seg ifølge KdV-likningen til $u(x,t_1)$ etter tida t_1, og la oss tenke oss at Schrödingerproblemet løst for begge potensialer $u(x,0)$ og $u(x,t_1)$. Hvorledes sammenlikner løsningene seg?

c) Potensialet

$$u(x) = -\frac{m(m+1)\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x)} \tag{3}$$

i Schrödingerlikningen har m diskrete egenverdier når m er et helt positivt tall, og $[m]+1$ diskrete egenverdier når m ikke er heltallig. Her betyr $[m]$ heltallsdelen av m. Dersom m er heltallig ($[m]=m$) er potensialet *refleksjonsløst*, ellers ikke. (Disse egenskapene til potensialet (3) skal du ikke vise!)

Bruk denne informasjonen til finne formen på solitære bølger for KdV-likningen (1). [I nødsfall kan du finne formen på solitære bølger på annen måte.]

d) Korteweg-de Vries-likningen kan bl.a. beskrive overflatebølger når en inkompressibel væske strømmer virvelfritt. Hvilke krav må vi sette til overflateforstyrrelsene for at dette skal være en god beskrivelse? (Svar kort.)

e) En solitær bølge forplanter seg i en kanal. Fra et bestemt sted av blir kanalen grunnere idet dybden reduseres til det halve (se figur).

Anta at den solitære bølegen kommer uendret over ujevnheten i bunnen og starter på den grunnere kanalen. Hvorledes venter du at bølgeprofilet, kvalitativt sett, ser ut ved senere tidspunkt? (Bruk at avstander, både i horisontal og vertikal retning, skalerer med kanaldybden. Dette er utdypet i vedlegget.)

Oppgave 2

To arter, her kalt kaniner og sauer, konkurrerer om et begrenset beite. Populasjonene av de to artene ved tida t er $x(t)$ (kaniner) og $y(t)$ (sauer). Populasjoner så små at det er nok mat vokser eksponensielt med ulike vekstrater (større for kaniner enn for sauer), men denne veksten vil reduseres for større populasjoner på grunn av de begrensede matressurser.

En meget enkel modell som illustrerer dette er følgende ikkelineære dynamiske system:

$$\frac{dx}{dt} = x\,(3-x-2y) \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = y\,(2-x-y) \tag{5}$$

(Komplikasjoner som rovdyr, sykdom, årstidsvariasjoner og alternative ressurser er det sett bort fra.)

a) Finn alle fikspunktene (likevektspunktene) (x^*, y^*) for systemet.

b) Klassifisér fikspunktene med hensyn til stabilitet.

c) Nå skal vi se på strømningen i faserommet for dette systemet, som ikke har noen grensesykler. Hvorledes strømmer fasepunktene langs x-aksen og langs y-aksen? Hva skjer for store avstander fra origo? Skissér tilslutt rent kvalitativt strømningen i faserommet, og vis på skissen nedslagsfeltene til de stabile fikspunktene.

Biologer har formulert et prinsipp om konkurranseutelukkelse, som sier at to arter som konkurrerer om samme begrensede ressurs ikke kan sameksistere. Vil du si at resultatene i ovenstående enkle modell er i overensstemmelse med dette prinsippet?

Oppgave 3

a) Definer Lyapunoveksponenten λ for en generell éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$, med gitt x_1. Vis at Lyapunoveksponenten kan uttrykkes som

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |F'(x_i)|.$$

b) En éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$ er definert ved

$$F(x) = 1 - 1.9\,|x|^{\frac{3}{4}},$$

skissert i figuren.

Tre ulike baner for denne iterasjonen starter slik:

Bane a: $x_1 = 0$
Bane b: $x_1 = 5$
Bane c: $x_1 = 10$

Angi for hver bane den tilhørende attraktortype. Begrunn svaret.

c) Angi fortegnet for Lyapunoveksponenten for hver av de tre banene i punkt b).

Beregn for bane c den numeriske verdi av Lyapunoveksponenten. Det kreves ikke stor nøyaktighet.

Vedlegg

Skalering av KdV-likningen for kanalbølger

I forelesningene ble det gitt en perturbativ utledning av KdV-likningen for overflatebølger i en kanal med vanndybde h. Uttrykt ved de opprinnelige fysiske størrelsene tilfredsstiller $s(x,t)$ (høyde over uforstyrret vannspeil) likningen

$$\frac{1}{\sqrt{gh}}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{2h} s \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0. \tag{6}$$

Ved å skalere alle lengder med h, dvs innføre

$$s/h \equiv \hat{s}$$

$$x/h \equiv \hat{x},$$

får vi

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{s}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2}\hat{s}\frac{\partial \hat{s}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \hat{s}}{\partial \hat{x}^3} = 0,$$

der $t\sqrt{g/h} \equiv \hat{t}$. Ved en Galileitransformasjon og ved å skalere med rent numeriske faktorer kan en få KdV-likningen på en av de mer vanlige formene. For vårt formål er det uviktig, det er skaleringen med kanaldybden som er av betydning her.