Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag SIF 4088 Ikkelineær dynamikk
Onsdag 29. november 2000
Tid: 09.00–15.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

To arter, la oss si gjedde og abbor, spiser hverandre. Antallet gjedder og abbor ved tiden t er henholdsvis $G(t)$ og $A(t)$. Vi antar at

$$\begin{aligned} \dot{G} &= G f_1(A) = G\left(a_1 - b_1 A - \frac{c_1}{d_1 + A}\right), \\ \dot{A} &= A f_2(G) = A\left(a_2 - b_2 G - \frac{c_2}{d_2 + G}\right), \end{aligned}$$

der $\dot{G}$ og $\dot{A}$ er de tidsderiverte, og der alle konstantene a_i, b_i, c_i og d_i, med $i = 1, 2$, er positive.

a) Gi en kort kvalitativ forklaring på hvilke effekter som kan gi opphav til de tre leddene a_1, $-b_1 A$ og $-c_1/(d_1 + A)$ i funksjonen $f_1(A)$.
Hva betyr det fysisk sett dersom $f_1(0) > 0$, eller dersom $f_1(0) < 0$?

b) Vis at $F_1(A) - F_2(G)$ er en bevegelseskonstant, der

$$\begin{aligned} F_1(A) &= \left(a_1 - \frac{c_1}{d_1}\right)\ln A + \frac{c_1}{d_1}\,\ln(d_1 + A) - b_1 A\,, \\ F_2(G) &= \left(a_2 - \frac{c_2}{d_2}\right)\ln G + \frac{c_2}{d_2}\,\ln(d_2 + G) - b_2 G\,. \end{aligned}$$

Vis mer generelt at bevegelsesligninger av formen $\dot{G} = G f_1(A)$, $\dot{A} = A f_2(G)$ alltid har en bevegelseskonstant av formen $F_1(A) - F_2(G)$.

c) Vis at bevegelsesligningene ovenfor kan gjøres dimensjonsløse ved skalering slik at vi f.eks. får $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ og $b_2 = 1$.

I resten av denne oppgaven antar vi følgende parameterverdier:

$$\begin{aligned} f_1(A) &= 1 - A - \frac{0,2}{0,15 + A} , \\ f_2(G) &= 2 - G - \frac{0,1}{0,2 + G} . \end{aligned}$$

d) Ett fikspunkt til systemet er $G = A = 0$. Vis at dette er et sadelpunkt, og finn den stabile og ustabile mangfoldigheten til sadelpunktet.
Finn, og klassifiser, eventuelle andre fikspunkt i det fysisk interessante området, der $G \geq 0$ og $A \geq 0$.

e) Skisser et faseportrett i området $G \geq 0$ og $A \geq 0$.
Hva vil skje med bestandene av gjedde og abbor i løpet av mange år, i følge denne modellen, med de gitte parameterverdiene?
Kan bestandene variere kaotisk, enten med de gitte parameterverdiene eller med andre verdier av parametrene? Begrunn svaret.

f) Forklar kort hva som menes med at en kurve er en grensesyklus, en nullklin, en homoklin eller en heteroklin.
Hvis det finnes eksempler i faseportrettet ovenfor, så marker dem!

Oppgave 2:

a) Anta at $u = u(x,t)$ er en løsning av Korteweg–de Vries-ligningen (KdV-ligningen)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 ,$$

der $u_t = \partial u/\partial t$, osv.. La α, β, γ, δ og ϵ være konstanter, og la

$$U(X,T) = \alpha + \beta u(x,t) ,$$

der

$$x = \gamma X + \delta T , \qquad t = \epsilon T ,$$

eller omvendt,

$$X = \frac{x}{\gamma} - \frac{\delta t}{\gamma \epsilon} , \qquad T = \frac{t}{\epsilon} .$$

Vis at $U = U(X,T)$ er en løsning av KdV-ligningen

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = 0$$

for vilkårlige verdier av γ og δ, dersom

$$\alpha = \frac{\delta}{6\gamma} , \qquad \beta = \gamma^2 , \qquad \epsilon = \gamma^3 .$$

b) Anta spesielt at $u = u(x,t) = \phi(x - ct)$ er en solitonløsning av KdV-ligningen. Solitonet beveger seg med konstant hastighet $c > 0$.
Hvilken ligning må funksjonen ϕ oppfylle?
Siden et soliton pr. definisjon er en lokalisert bølge, må begge grenseverdiene $\phi_+ = \lim_{x\to+\infty} \phi(x)$ og $\phi_- = \lim_{x\to-\infty} \phi(x)$ eksistere. Vis at da må $\phi_+ = \phi_-$.
Når en studerer KdV-solitoner, er det vanlig å begrense seg videre til det tilfellet at $\phi_+ = \phi_- = 0$. Hvorfor er denne begrensningen uvesentlig?

c) Hvordan varierer høyden og bredden av et KdV-soliton med hastigheten?
(Høyde og bredde kunne vi eventuelt også kalle amplitude og bølgelengde. Utled f.eks. sammenhengen mellom hastighet, høyde og bredde ved hjelp av transformasjonen under punkt a) ovenfor.)

d) KdV-ligningen kan skrives som

$$u_t + [L, A] = 0 \ ,$$

der L og A er følgende Lax-par av operatorer:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t) \ , \\ A &= -4\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 6u(x,t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 3u_x(x,t) \ . \end{aligned}$$

Bruk det til å vise at når $u(x,t)$ oppfyller KdV-ligningen, så er egenverdispektret til Schrödinger-operatoren L uavhengig av t.

e) Vis at dersom den reelle bølgefunksjonen $\psi = \psi(x,t)$ er en løsning av ligningen $\psi_t = A\psi$, der A er den samme operatoren som i punkt d), så er normeringsintegralet

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \psi^2$$

en bevegelseskonstant.
I beviset er det nødvendig å gjøre visse antagelser om funksjonene $\psi(x,t)$ og $u(x,t)$. Presiser hvilke antagelser du gjør.
Hvorfor er dette resultatet av betydning når det gjelder å bruke invers-spredning-metoden til å løse KdV-ligningen?