NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I SIF4088 IKKELINEÆR DYNAMIKK

Onsdag 18. desember 2002
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*

Sensuren faller 8. januar 2003.

Oppgave 1

a) Hva er en permanent bølge, en solitær bølge og et soliton? Skissér ulike typer solitoner, med én-solitonløsninger av Korteweg-de Vries-likningen, den kubiske Schrödinger-likningen og sine-Gordon-likningen som eksempler.

b) La $u(x,t)$ tilfredsstille Korteweg-de Vries-likningen i den dimensjonsløse formen

$$u_t + u\, u_x + u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

Vis at for en lokalisert puls er

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx$$

og

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2} u^2\, dx$$

bevegelseskonstanter.

c) Vis at tyngdepunktet

$$X(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, u(x,t)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx}$$

for en lokalisert puls beveger seg med konstant hastighet.

d) Korteweg-de Vries-likningen beskriver bl.a. overflatebølger når en inkompressibel ikke-viskøs væske strømmer virvelfritt. Under hvilke fysiske betingelser er dette en god beskrivelse? (Svar kort.)

Oppgave 2

I denne oppgaven studerer vi iterasjonen

$$x_{n+1} = 1 - \mu\, x_n^2, \tag{2}$$

med μ som kontrollparameter, og med en startverdi x_1 som oppfyller $|x_1| < 1$. Vi forutsetter at $0 < \mu < 2$.

a) Bestem iterasjonens fikspunkter. Hva er den største verdien av kontrollparameteren, μ_1, som svarer til stabilt fikspunkt? (Begrunn svaret.)

b) Attraktoren for periode-to-iterasjoner er to verdier, x_+ og x_-, som iterasjonen oscillerer mellom. Vis først at

$$x_+ + x_- = 1/\mu,$$

og bruk dette til å vise at

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{4\mu - 3}}{2\mu}.$$

c) Hva er den største verdien μ_2 av kontrollparameteren som svarer til *stabil* periode-to-iterasjon? For hvilken verdi av μ er periode-to-iterasjonen superstabil?

d) Hva beskriver Lyapunoveksponenten λ for en éndimensjonal iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$?

Hvilket fortegn venter du for Lyapunov-eksponenten for iterasjonen (2) for kontrollparametre som oppfyller $\mu_1 < \mu < \mu_2$, der μ_1 og μ_2 er definert ovenfor? Skissér kvalitativt hvorledes Lyapunov-eksponenten varierer som funksjon av kontrollparameteren i dette intervallet ? (Ingen utledninger er påkrevd for disse spørsmålene.)

Oppgave 3

På et begrenset område lever to arter, A og B som konkurrerer, f.eks. om tilgjengelig næring. Artene har antallstettheter ved tida t lik henholdsvis $n_A(t)$ og $n_B(t)$. For svært små antallstettheter er reproduksjonsratene lik henholdsvis r_A og r_B, men med økende tettheter vil populasjonene øke langsommere. Tidsutviklingen er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{dn_A}{dt} &= n_A\,(r_A - a_A n_A - b_A n_B) \\ \frac{dn_B}{dt} &= n_B\,(r_B - a_B n_B - b_B n_A)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Her er r_A, r_B, a_A, b_A, a_B og b_B positive konstanter. Konstantene a_A og a_B beskriver hvordan populasjonsveksten blir hemmet på grunn av konkurranse om næringen mellom medlemmer av egen art, mens konstantene b_A og b_B beskriver hvordan populasjonsveksten blir hemmet på grunn av konkurranse med den andre arten.

a) Kan det dynamiske systemet (3) ha et kaotisk tidsforløp?

b) Anta først at artene ikke konkurrerer seg imellom, dvs at $b_A = b_B = 0$. Forklar kvalitativt hvorledes start-tetthetene $n_A(0) > 0$ og $n_B(0) > 0$ utvikler seg i tida, og angi de presise verdier for $n_A(\infty)$ og $n_B(\infty)$ for dette tilfellet.

c) Anta fra nå av at den innbyrdes konkurransen ikke kan neglisjeres ($b_A \neq 0$ og $b_B \neq 0$), og sett for enkelhets skyld $r_A = r_B = r$. Skalér tetthetene og innfør ny skalert tidsvariabel τ slik at likningene (3) tar formen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= x(1 - x - \alpha y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= y(1 - y - \beta x), \end{aligned} \tag{4}$$

der x er proporsjonal med n_A og y er proporsjonal med n_B. Hva er de nye konstantene (kontrollparametrene) α og β uttrykt ved konstantene i (3)?

d) Finn alle fikspunktene for det dynamiske systemet (4).

For et av fikspunktene, $F_0 = (x^0, y^0)$, kan både x^0 og y^0 være ulik null. For hvilke verdier av kontrollparametrene ligger dette fikspunktet i den fysisk relevante kvadrant av faserommet, $x > 0, y > 0$?

e) Klassifisér alle fysisk interessante fikspunkt som du har funnet i punkt d med hensyn til type (sadelpunkt, stabilt/ustabilt knutepunkt, stabil/ustabil spiral (fokus), eller senter). Anta $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$.

f) Situasjoner der hver art har noe artsspesifikk næring tilgjengelig ved siden av næringen som artene konkurrerer om, tilsvarer et dynamisk system der kontrollparameterne α og β er små. Ta som eksempel $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, og gi en grov kvalitativ skisse av faseportrettet (strømningen i den fysisk relevante del av faserommet) i dette tilfellet. (Ingen grensesykler er tilstede.) Hva er de dimensjonsløse populasjonstetthetene x og y ved $t = \infty$?

g) Dersom artene er mikroorganismer som avgir stoffer som er toksiske for den konkurrerende arten vil derimot tilstedeværelsen av den andre arten være av stor betydning, og det tilsvarer at kontrollparametrene α og β er store. Ta nå som eksempel $\alpha = \beta = 2$, og gi en grov kvalitativ skisse av faseportrettet (i den fysisk relevante del av faserommet) for dette tilfellet. (Igjen er ingen grensesykler tilstede.) Hva blir resultatet for $t = \infty$ i dette tilfellet?