NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag TFY 4305 Ikkelineær dynamikk
Tirsdag 16. desember 2003
Tid: 09.00–15.00

Sensurfrist: Tirsdag 6. januar 2004

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

a) Hva er et autonomt dynamisk system?
Kan svingninger forekomme i et endimensjonalt autonomt system med kontinuerlig tid?
I et endimensjonalt ikke-autonomt system med kontinuerlig tid?
I et endimensjonalt autonomt system med diskret tid?
Begrunn svarene (kort).

b) Hva skjer ved en Hopf-bifurkasjon av et fikspunkt i et todimensjonalt dynamisk system med kontinuerlig tid?
Hvorfor er det en vesentlig forskjell mellom en superkritisk og en subkritisk Hopf-bifurkasjon?
Hvilke andre typer bifurkasjoner kan forekomme, i denne sammenhengen?
Hvordan kan en Hopf-bifurkasjon gjenkjennes ved hjelp av lineær stabilitetsanalyse?

c) Definer hva som menes med Lyapunov-eksponenter (eller Liapunov-eksponenter), både i et dynamisk system med kontinuerlig tid, og i et system med diskret tid.
Hva kan du si om de tre Lyapunov-eksponentene i et tredimensjonalt dynamisk system med kontinuerlig tid, dersom bevegelsen er en stabil grensesyklus (engelsk: "limit cycle")?
Dersom bevegelsen er en stabil kvasiperiodisk bane?

d) Definer deterministisk kaos.
Hvorfor kan deterministisk kaos ikke forekomme i et todimensjonalt autonomt system med kontinuerlig tid?
Hvorfor kan deterministisk kaos likevel forekomme i et endimensjonalt autonomt system med diskret tid (som f.eks. i den logistiske avbildningen)?

Oppgave 2:

a) Den endimensjonale avbildningen

$$x \mapsto \widetilde{x} = f(x) = c + \epsilon x - x^2 \tag{1}$$

er en versjon av den logistiske avbildningen. Her er x en reell variabel. Videre er c og ϵ konstante reelle parametre (kontrollparametre), og vi antar i hele denne oppgaven at ϵ er liten, dvs. at $|\epsilon| \ll 1$.
Vis at avbildningen har to fikspunkt dersom

$$c > -\frac{(1-\epsilon)^2}{4} \, ,$$

og at det ene fikspunktet alltid er ustabilt, mens det andre er stabilt for

$$c < 1 - \frac{(1-\epsilon)^2}{4} \, .$$

b) Anta nå at den ene parameteren ϵ holdes konstant, og at den andre parameteren c har en verdi slik at det ene fikspunktet er stabilt. Hvordan oppfører systemet seg dersom verdien av c økes slik at fikspunktet blir ustabilt?

c) I resten av denne oppgaven vil vi studere oppførselen til to logistiske avbildninger som er svakt koplet til hverandre. Vi ser da på den todimensjonale avbildningen

$$(x, y) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (\, c + \epsilon y - x^2 \, , \, c + \epsilon x - y^2 \,) \, .$$

Vis at Jacobi-matrisen til avbildningen, definert som

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \end{pmatrix} ,$$

har egenverdiene $\lambda = -x - y \pm \sqrt{(x-y)^2 + \epsilon^2}$.
(Dette er et eksempel på det generelle teoremet at egenverdiene til en symmetrisk reell matrise er reelle.)

d) Fordi koplingen er symmetrisk, slik at hvert av de to systemene påvirker det andre nøyaktig like mye, er det mulig at de beveger seg nøyaktig i takt, altså slik at $x = y$. Denne bevegelsen, som er synkron og i fase, beskrives av den endimensjonale avbildningen (1) studert under punkt a) ovenfor, som har to fikspunkt dersom $c > -(1-\epsilon)^2/4$.
Vis at den betingelsen som vi fant under punkt a) ovenfor, at

$$c < 1 - \frac{(1-\epsilon)^2}{4} = \frac{3 + 2\epsilon - \epsilon^2}{4} \, ,$$

er nødvendig for at det todimensjonale systemet skal ha et stabilt fikspunkt slik at de to delsystemene beveger seg synkront og i fase.
Denne betingelsen er nødvendig, men ikke tilstrekkelig. Hvorfor ikke?
Vis at en annen nødvendig betingelse er at

$$c < \frac{3(1-\epsilon)^2}{4} = \frac{3 - 6\epsilon + 3\epsilon^2}{4} \, .$$

Dette er en strengere ulikhet dersom $\epsilon > 0$ (og $|\epsilon| \ll 1$, som vi forutsetter hele tiden).

e) Vis at det finnes en "utenomdiagonal" to-syklus av formen

$$(u,v) \mapsto (v,u) \mapsto (u,v) \mapsto \dots\ ,$$

der de to systemene altså beveger seg synkront, men i motfase.
Bevis for stabilitet eller ustabilitet av to-syklusen forlanges ikke her.
I grensetilfellet $u = v$ faller denne to-syklusen sammen med det ene diagonale fikspunktet. For hvilke verdier av kontrollparametrene c og ϵ skjer det?
Hvilken type bifurkasjon er dette? Er den subkritisk eller superkritisk hvis $\epsilon > 0$?

Kommentar:
Selvsagt finnes også den vanlige "diagonale" to-syklusen, av formen

$$(u,u) \mapsto (v,v) \mapsto (u,u) \mapsto \dots\ ,$$

som oppstår fra et fikspunkt i en flipp-bifurkasjon ved $c = 1 - ((1-\epsilon)^2/4)$. Denne to-syklusen er ustabil like etter fødselen dersom fikspunktet som den oppstår fra, er ustabilt.
Dessuten finnes det et par av utenomdiagonale fikspunkt, av formen

$$(u,v) \mapsto (u,v) \mapsto (u,v) \mapsto \dots \qquad \text{og} \qquad (v,u) \mapsto (v,u) \mapsto (v,u) \mapsto \dots\ ,$$

men de er alltid ustabile.
Dynamikken til et system av to koplede endimensjonale avbildninger kan være forbløffende variert, selv når koplingen er svak. Det er f.eks. fullt mulig at de to to-syklusene ovenfor, den diagonale og den utenomdiagonale, begge er stabile for de samme verdiene av kontrollparametrene, med fraktale grenser mellom nedslagsfeltene. Både periodedoblingsekvenser og Hopf-bifurkasjoner kan forekomme, foruten kvasiperiodisk bevegelse, og *hyperkaos*, der to Lyapunov-eksponenter er positive.

Oppgave 3:

a) Korteweg–de Vries-ligningen (KdV-ligningen) skrevet på formen

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

har solitonløsningene

$$u(x,t) = -\frac{c}{2\cosh^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - x_0 - ct)\right]}\ . \tag{2}$$

(Notasjon: $u_t = \partial u/\partial t$, $u_x = \partial u/\partial x$, $u_{xxx} = \partial^3 u/\partial x^3$.)
Skisser kort hvordan disse løsningene kan utledes.
Hva er betydningen av konstantene c og x_0?

b) Har KdV-ligningen to-solitonløsninger der de to solitonene beveger seg med nøyaktig samme hastighet, slik at det ene følger etter det andre i konstant avstand?
(Hint: prøv f.eks. den samme metoden som brukes til å finne én-solitonløsningene gitt i ligning (2).)

c) For å kontrollere svaret ditt på spørsmålet i forrige punkt, kan du studere de eksplisitte to-solitonløsningene av ligningen, som har formen

$$u(x,t) = -2\,\frac{c_1 f_1 + c_2 f_2 + C f_1 f_2 [2(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_1})^2 + c_1 f_2 + c_2 f_1]}{(1 + f_1 + f_2 + C f_1 f_2)^2} \ ,$$

der

$$f_i = \mathrm{e}^{-\sqrt{c_i}(x - x_i^0 - c_i t)} \ ,$$

og

$$C = \left(\frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}} \right)^2 \ .$$

De positive konstantene c_1 og c_2 er hastighetene til de to solitonene.
Hvordan ser to-solitonløsningen ut i grensetilfellet $c_1 = c_2$?

d) Vis at for en gitt egenverdi λ har Schrödinger-ligningen

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi \ ,$$

der $u = u(x)$ er et potensial som går mot null for $x \to \pm\infty$, aldri mer enn en løsning for bølgefunksjonen $\psi = \psi(x)$ (på en normeringskonstant nær), når det forutsettes at ψ er kvadratisk integrerbar.
(Hint: se på den asymptotiske oppførselen til $\psi(x)$ i grensene $x \to \pm\infty$.)
Hva er sammenhengen mellom dette resultatet og spørsmålet om det eksisterer to-solitonløsninger av KdV-ligningen der de to solitonene beveger seg med samme hastighet?