Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653 eller 90 07 51 72

Eksamen i fag TFY 4305 Ikkelineær dynamikk
Onsdag 30. november 2005
Tid: 15.00–19.00

Sensurfrist: Onsdag 21. desember 2005

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

Gitt egenverdiligningen $L\psi = \lambda\psi$, der L er følgende Schrödinger-operator,

$$L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x) ,$$

mens λ er en egenverdi og $\psi = \psi(x)$ er en (reell eller kompleks) egenfunksjon.
Funksjonen $u = u(x)$ er reell, og tolkes som et potensial når ligningen $L\psi = \lambda\psi$ tolkes som den tidsuavhengige (stasjonære) Schrödinger-ligningen.
Anta nå at u avhenger også av tiden t, dvs. at $u = u(x, t)$, og tilfredsstiller ligningen

$$u_t + cu_x = 0 ,$$

der c er konstant, og $u_t = \partial u/\partial t$, $u_x = \partial u/\partial x$.
Vis at da kan også ψ velges tidsavhengig, $\psi = \psi(x, t)$, på en slik måte at egenverdiligningen $L\psi = \lambda\psi$ gjelder med en konstant (tidsuavhengig) egenverdi λ.
Vis det gjerne på to forskjellige måter:
1) Ved å finne den generelle løsningen av ligningen $u_t + cu_x = 0$.
2) Ved å finne en operator A slik at L og A er et Lax-par av operatorer, med

$$[L, A] = cu_x ,$$

mens tidsavhengigheten til egenfunksjonen ψ er gitt ved ligningen $\psi_t = A\psi$.

Oppgave 2:

Den grunnleggende prosessen i en atomreaktor, eller en atombombe av fisjonstypen, er at et nøytron absorberes i en tung atomkjerne, for eksempel uran 235 eller plutonium 239, og får kjernen til å spaltes (fisjonere) i to eller flere lettere kjerner. Dermed frigjøres bindingsenergi, pluss et antall nøytroner som kan spalte nye kjerner, og så videre i en kjedereaksjon. En slik kjedereaksjon er en statistisk prosess, fordi antallet nøytroner som frigjøres og spalter nye kjerner, varierer statistisk.
For at reaktoren eller bomben skal fungere, er det nødvendig at kjedereaksjonen ikke stopper av seg selv etter kort tid. I denne oppgaven vil vi se på en metode for å beregne sannsynligheten for at ett nøytron starter en kjedereaksjon som ikke stopper.
La p_n, med $n = 0, 1, 2, \ldots$, være sannsynligheten for at et nøytron forårsaker en kjernespalting der det produseres n nye nøytroner. Da er for eksempel p_0 sannsynligheten for at det ene nøytronet enten ikke spalter noen kjerne, eller spalter en kjerne uten at det produseres nye nøytroner.
En nødvendig forutsetning for at det skal oppstå en kjedereaksjon, er opplagt at det i hvert fall en gang i blant frigjøres mer enn ett nøytron når en atomkjerne spaltes. Vi antar derfor at $p_n > 0$ for minst en $n > 1$.
Definer den *sannsynlighetsgenererende funksjonen*

$$F(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \ ,$$

der x er en variabel som ikke har noen annen betydning enn at den er argumentet til funksjonen F.
Fordi sannsynligheter alltid er ikke-negative, er $F(x)$ og alle dens deriverte ikke-negative for $x \geq 0$. Siden vi antar at $p_n > 0$ for minst en $n > 1$, oppfyller den andrederiverte den sterkere ulikheten

$$F''(x) > 0 \quad \text{for alle} \quad x > 0 \ . \tag{1}$$

Den totale sannsynligheten er lik 1, og det betyr at $x = 1$ er et fikspunkt for F,

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \ .$$

Den sannsynlighetsgenererende funksjonen inneholder all informasjon om sannsynlighetsfordelingen. For eksempel kan forventningsverdien av antallet nøytroner som er første generasjons etterkommere etter det ene nøytronet, beregnes ved derivasjon av F,

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, n = F'(1) \ .$$

Det første nøytronet definerer vi som generasjon 0. Vi sier at et nøytron tilhører generasjon $g = 1, 2, 3, \ldots$ dersom det er produsert i en kjernespalting forårsaket av et nøytron av generasjon $g - 1$.
La $p(n, g)$ være sannsynligheten for at generasjon g består av n nøytroner. Den sannsynlighetsgenererende funksjonen for generasjon g er

$$F_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, g) \, x^n \ .$$

Den totale sannsynligheten i hver generasjon er lik 1, det vil si at

$$F_g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,g) = 1 \; .$$

Med den notasjonen vi har innført, er $F_0(x) = x$ og $F_1(x) = F(x)$.
Hvis vi for eksempel vet at generasjon g består av to nøytroner, så har vi pr. definisjon at $F_g(x) = x^2$, og det er lett å vise at da er $F_{g+1}(x) = (F(x))^2$ (bevis forlanges ikke her).
Mer generelt, hvis vi vet at generasjon g består av k nøytroner, så har vi pr. definisjon at $F_g(x) = x^k$, og det er nesten like lett å vise (ved induksjon) at da er $F_{g+1}(x) = (F(x))^k$.
Relasjonen

$$F_{g+1}(x) = F_g(F(x))$$

gjelder helt generelt, også når vi bare kjenner en sannsynlighetsfordeling for antallet nøytroner i generasjon g. Derfor er den sannsynlighetsgenererende funksjonen F_g for generasjon g lik den g ganger itererte av den sannsynlighetsgenererende funksjonen F,

$$F_g(x) = F^g(x) = F(F(\ldots F(x)\ldots)) \; .$$

Selv om denne prosessen er statistisk, kan den behandles ved iterasjoner av en funksjon, og derfor kan vi bruke metoder fra deterministisk ikkelineær dynamikk.

a) Funksjonen $F(x)$ har, som sagt, alltid fikspunktet $x = x_1 = 1$.

Vis at hvis $F'(1) = 1$, så er x_1 det eneste fikspunktet for $x \geq 0$.
Husk forutsetningen gitt i ligning (1).

Når $F'(1) = 1$, så er fikspunktet x_1 marginalt stabilt.
Avgjør, gjerne ved å tegne en figur, om det er stabilt eller ustabilt.

Hva er den fysiske tolkningen av betingelsen $F'(1) = 1$?

b) Vis at hvis $F'(1) \neq 1$, så har $F(x)$ nøyaktig ett fikspunkt $x = x_2 \geq 0$ i tillegg til x_1.

Vis at $x_2 > 1$ hvis $F'(1) < 1$, og at $0 \leq x_2 < 1$ hvis $F'(1) > 1$. Tegn gjerne figur.

Er fikspunktet x_2 stabilt eller ustabilt?

c) Forventningsverdien av antallet nøytroner i generasjon g er

$$\langle n \rangle_g = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,g)\, n = F_g'(1) \; .$$

Vis at antallet nøytroner vokser (eller avtar) eksponensielt med tiden, i den forstand at forventningsverdien $\langle n \rangle_g$ øker (eller avtar) eksponensielt som funksjon av generasjonstallet g. Mer presist, vis at

$$\langle n \rangle_g = (\langle n \rangle_1)^g \; .$$

d) Selv om det forventede antallet nøytroner vokser eksponensielt, kan det likevel tenkes at sannsynligheten er større enn null for at hele kjedereaksjonen stopper av seg selv.

Sannsynligheten for at kjedereaksjonen stopper før generasjon g, er

$$p(0,g) = F_g(0) \ .$$

Sannsynligheten for at den stopper etter et endelig antall generasjoner, er

$$p(0,\infty) = \lim_{g\to\infty} p(0,g) \ .$$

Sannsynligheten for at kjedereaksjonen ikke stopper, er $1 - p(0,\infty)$. For at en atomreaktor eller atombombe skal fungere, må den altså konstrueres slik at $p(0,\infty) < 1$.

Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse som sannsynlighetsfordelingen p_n må oppfylle for at $p(0,\infty) < 1$.

Som et numerisk eksempel, anta at $p_0 = 0{,}18$, $p_1 = 0{,}58$, $p_2 = 0{,}24$, og $p_n = 0$ for $n > 2$.

Hvor stor er da forventningsverdien $\langle n\rangle_g$ for $g = 1$? For $g = 10$? $g = 100$? $g = 1000$?

Og hvor stor er stoppsannsynligheten $p(0,\infty)$?

Kommentar: Grensen $g \to \infty$ er selvfølgelig en urealistisk matematisk abstraksjon. Det viktige spørsmålet i praksis er om kjedereaksjonen fortsetter så lenge at antallet atomkjerner som spaltes, er en vesentlig andel, gjerne noen prosent, av det totale antallet. Den matematiske grenseverdien $p(0,\infty)$ er et godt mål på sannsynligheten for at det skjer.

Oppgave 3:

Lorenz-ligningene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\ ,\\ \dot{y} &= (r-z)x-y\ ,\\ \dot{z} &= xy-bz\ ,\end{aligned}$$

inneholder de tre konstante parametrene $\sigma > 0$, $b > 0$ og $r > 0$.

a) Vis at Lorenz-ligningene er invariante under transformasjonen $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$, som er en rotasjon på 180° om z-aksen.

Hvilken betydning har denne symmetrien for eksempel når det er snakk om fikspunkt, attraktorer og bifurkasjoner?

Figur 1 (se siste side) viser, som eksempler, todimensjonale projeksjoner av attraktorene i Lorenz-systemet med de «standardiserte» parameterverdiene $\sigma = 10$, $b = 8/3$, og med de fire forskjellige verdiene $r = 240$, $r = 220$, $r = 216$ og $r = 214$. Figuren viser at det finnes to forskjellige attraktorer i hvert av disse fire eksemplene.

b) Har Lorenz-systemet tidsreversjonssymmetri? Begrunn svaret.

Hvorfor kan ikke Lorenz-ligningene ha en kvasiperiodisk løsning?

c) Vis at origo er et stabilt fikspunkt for $r < 1$, og et ustabilt fikspunkt, nærmere bestemt et tredimensjonalt sadelpunkt, for $r > 1$.

Hvilke andre fikspunkt finnes det?

Hvilken type bifurkasjon er det som skjer når origo blir ustabilt ved $r = 1$? Her kreves det mye arbeid for å begrunne svaret helt stringent, derfor godtas en kvalifisert gjetning.

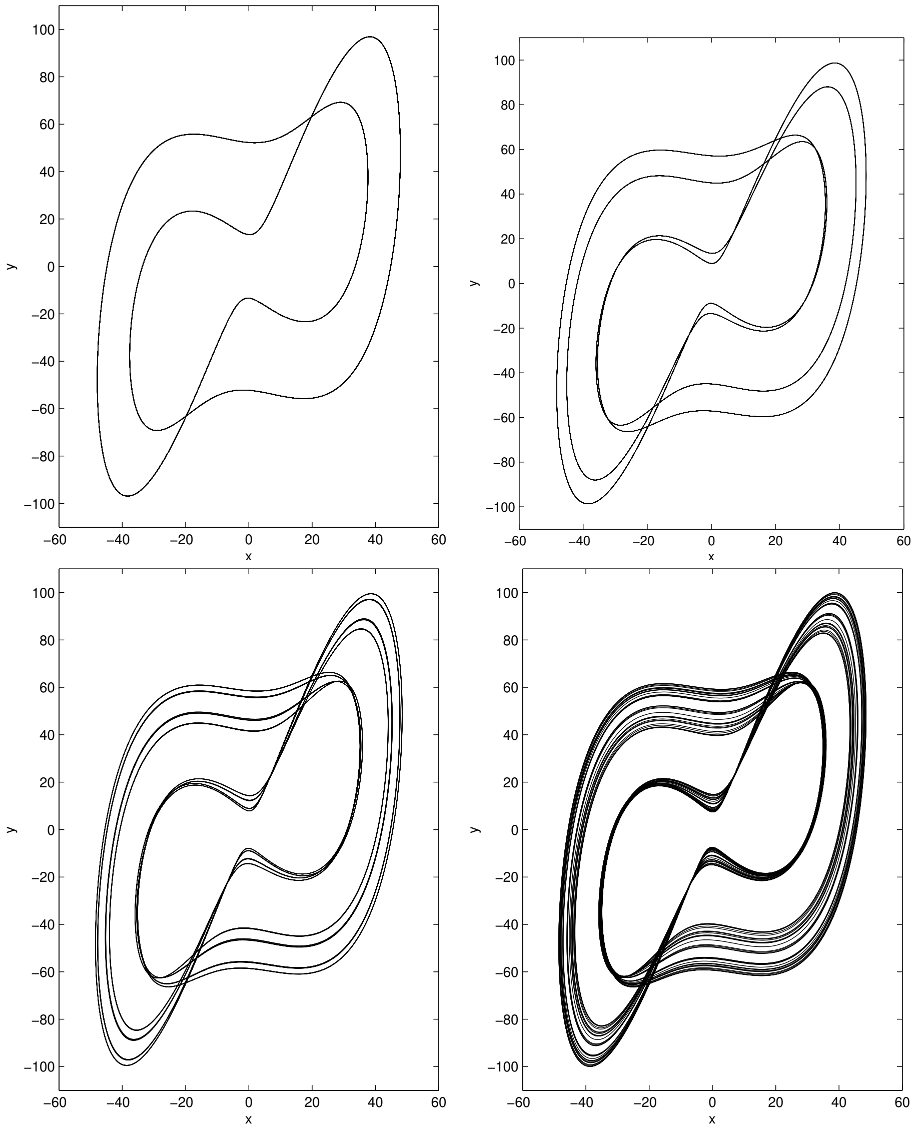
En kommentar (til forvirring eller opplysning): La $\sigma = 10$ og $b = 8/3$. Ved en bestemt kritisk parameterverdi $r = r_c \approx 313$ skjer samme type bifurkasjon, men med *avtagende* r i stedet for med *økende* r, og med *grensesykler* (engelsk: limit cycles) i stedet for med *fikspunkt*. For $r > r_c$ finnes det en globalt stabil grensesyklus som er symmetrisk om $(x, y) = (0, 0)$. Ved $r = r_c$ blir den ustabil, samtidig som det oppstår to nye grensesykler, som begge eksisterer og er stabile for $r < r_c$. Hver for seg er de to nye grensesyklene usymmetriske om $(x, y) = (0, 0)$. For $r < r_c$ eksisterer fremdeles den symmetriske grensesyklusen, men den vises ikke i Figur 1 fordi den er ustabil.

d) Figur 1 (siste side) viser attraktorene i Lorenz-systemet med $\sigma = 10$, $b = 8/3$, og med $r = 240$, $r = 220$, $r = 216$ og $r = 214$.

Hvilke av attraktorene i figuren er grensesykler, og hvilke er kaotiske?

Hvilken type bifurkasjon er dette et eksempel på?

Figur:



Figur 1: Attraktorer i Lorenz-systemet, projisert ned i xy-planet, for fire verdier av parameteren r. Øverst til venstre: $r = 240$, øverst til høyre: $r = 220$, nederst til venstre: $r = 216$, og nederst til høyre: $r = 214$. Parameterverdiene $\sigma = 10$ og $b = 8/3$ gjelder for alle fire figurene. Hver figur viser to forskjellige attraktorer som kan nås fra forskjellige startpunkt.