NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Jan Myrheim, tel. 73 59 36 53
Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I SIF4088 IKKELINEÆR DYNAMIKK

fredag 1. august 2003
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*

Sensuren faller 22. august 2003.

Oppgave 1

a) Hva er kriteriet for at et fikspunkt x^* for en iterasjon $x_{n+1} = F(x_n)$ er et *stabilt* fikspunkt? Begrunn svaret.

b) Gitt iterasjonen

$$x_{n+1} = F(x_n), \qquad \text{med} \qquad F(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)},$$

der $g(x)$ er en differensierbar funksjon.

Vis at et fikspunkt x^* for iterasjonen er en løsning av $g(x) = 0$, og at fikspunktet er superstabilt.

(Dette er Newtons metode til å finne en numerisk verdi for et nullpunkt av funksjonen $g(x)$.)

c) For iterasjonen

$$x_{n+1} = 1 - \tfrac{7}{4}x_n^2$$

gir startverdien $x = \frac{6}{7}$ en iterasjon med periode to. Er denne periode-to-iterasjonen stabil? Begrunn svaret.

Oppgave 2

I en kommune ved svenskegrensen, der sauehold er er en meget viktig næringsvei, blir mange sauer drept av ulv. Saueholderne har derfor fått tillatelse til å ansette jegere med fellingstillatelse for ulv. La antall sauer og antall ulver i kommunen ved tidspunktet t være henholdsvis $S(t)$ og $U(t)$. Det forutsettes at det ansettes et antall jegere proporsjonalt med antall sauer, slik at antall ulver som mister livet er proporsjonalt både med antall sauer og med ulvetallet. Antall sauer som blir drept forutsettes også være proporsjonalt med antall sauer og med ulvetallet. Netto reproduksjonstall (der det er tatt hensyn til slakting av lam) ved små populasjoner er r_S og r_U for henholdsvis sau og ulv. Tidsutviklingen er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= r_S S - a_S S^2 - b_S SU \\ \frac{dU}{dt} &= r_U U - a_U U^2 - b_U SU + C.\end{aligned} \tag{1}$$

Her er r_S, r_U, a_S, b_S, a_U, b_U og C positive konstanter. Konstantene a_S og a_U beskriver hvordan populasjonsveksten blir hemmet på grunn av konkurranse om næringen mellom medlemmer av egen art, mens konstanten C gir nettoantallet ulv som pr. tidsenhet kommer inn i kommunen fra Sverige.

a) Kan det dynamiske systemet (1) ha et kaotisk tidsforløp?

b) Anta først at ingen sauer drepes av ulv, dvs $b_S = 0$. Forklar kvalitativt hvorledes sauetallet da utvikler seg fra et startantall $S(0) > 0$.

c) Anta så at det ikke er jegere, dvs. $b_U = 0$. Hvorledes vil i såfall ulveantallet utvikle seg fra et startantall $U(0) > 0$?

d) Anta fra nå av at $b_S \neq 0$ og $b_U \neq 0$, og sett for enkelhets skyld $r_S = r_U = r$. Skalér populasjonstallene og innfør ny skalert tidsvariabel τ slik at likningene (1) tar formen

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\tau} &= s(1 - s - \alpha u) \\ \frac{du}{d\tau} &= u(1 - u - \beta s) + c,\end{aligned} \tag{2}$$

der s er proporsjonal med S og u er proporsjonal med U. Hva er de nye konstantene (kontrollparametrene) α, β og c uttrykt ved konstantene i (1)?

e) Anta for enkelhets skyld $\alpha = 1/2$ og $\beta = 2$ fra nå av. Finn alle fikspunktene for det resulterende dynamiske systemet,

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\tau} &= s(1 - s - \tfrac{1}{2}u) \\ \frac{du}{d\tau} &= u(1 - u - 2s) + c,\end{aligned} \tag{3}$$

f) Klassifisér fikspunktene som du har funnet i punkt e med hensyn til type (sadelpunkt, stabilt/ustabilt knutepunkt, stabil/ustabil spiral (fokus), eller senter) når et lite antall ulv kommer over grensen pr. tidsenhet, f.eks. $c = 0.25$. Gi en grov kvalitativ skisse av faseportrettet (strømningen i den fysisk relevante del av faserommet) for dette tilfellet. (Ingen grensesykler er tilstede.) Hva er de dimensjonsløse populasjonene s og u ved $t = \infty$?

g) Når et betydelig antall ulv kommer over grensen pr. tidsenhet er c stor. Ta f.eks. $c = 3$. Klassifisér fikspunktene som du har funnet i punkt e med hensyn til type (sadelpunkt, stabilt/ustabilt knutepunkt, stabil/ustabil spiral (fokus), eller senter) i dette tilfellet, Gi en grov kvalitativ skisse av faseportrettet. (Ingen grensesykler er tilstede.) Hva er nå de dimensjonsløse populasjonene s og u ved $t = \infty$?

Oppgave 3

a) Hva er en permanent bølge, en solitær bølge og et soliton? Skissér ulike typer solitoner, med én-solitonløsninger av Korteweg-de Vries-likningen, den kubiske Schrödinger-likningen og sine-Gordon-likningen som eksempler.

b) La $u(x, t)$ tilfredsstille Korteweg-de Vries-likningen i den dimensjonsløse formen

$$u_t - 6u\, u_x + u_{xxx} = 0. \tag{4}$$

Vis at for en lokalisert puls er

$$C = \int_{\infty}^{-\infty} \tfrac{1}{2} u^2 \, dx$$

en bevegelseskonstant.

c) Potensialet

$$u(x) = -\frac{m(m+1)\alpha^2}{\cosh^2(\alpha x)} \tag{5}$$

i Schrödinger-likningen

$$-\psi'' + u(x)\psi = \lambda\psi$$

har m diskrete egenverdier $\lambda_n = -n^2\alpha^2$, $n = 1, 2, \ldots m$. Anta at bølgefunksjonen $u(x, t)$ i Korteweg-de Vries-likningen (4) ved $t = 0$ er lik (5), $u(x, 0) = u(x)$, og anta $m = 10$. Forklar og skisser hvorledes $u(x, t)$ vil se ut etter en tid.

Det er oppgitt at

$$u(x, t) = -\frac{c/2}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0 - ct)\right)}$$

er solitær-bølge-løsninger av Korteweg-de Vries-likningen (4).