Kontinuasjonseksamen 2003 i
SIF4088 IKKELINEÆR DYNAMIKK
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Fikspunktet er stabilt hvis den deriverte i fikspunktet er mindre enn 1 i tallverdi, $|F'(x^*)| < 1$. Bevis:

Fikspunktet er definert ved at $F(x^*) = x^*$. For små avvik fra fikspunktverdien utvikler vi iterasjonsfunksjonen:

$$F(x) = F(x^*) + (x - x^*)F'(x^*) + \mathcal{O}(x - x^*)^2 = x^* + (x - x^*)F'(x^*) + \mathcal{O}(x - x^*)^2.$$

Dvs at til første orden i avviket er

$$x_{n+1} - x^* = F(x_n) - x^* = (x_n - x^*)F'(x^*),$$

dvs

$$|x_{n+1} - x^*| = |x_n - x^*| \cdot |F'(x^*)|,$$

slik at når $|F'(x^*)| < 1$ er $|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$, avviket fra fikspunktet avtar. Altså er fikspunktet da stabilt.

b) Fikspunktet er gitt ved $x = F(x)$, som i dette tilfelle gir $g(x)/g'(x) = 0$, dvs $g(x) = 0$. Stabilitet, og deriblant superstabilitet, er bestemt ved størrelsen på den deriverte av F i fikspunktet. Her er

$$F'(x) = 1 - \frac{g'^2 - gg''}{g'^2} = gg''/g'^2.$$

Da $g = 0$ i fikspunktet er $F'(x^*) = 0$, som gir superstabilitet.

c) For en periode-to-iterasjon $x_+, x_-, x_+, x_-, \ldots$ er begge verdier fikspunkt for $F^2(x) = F(F(x))$, og vi kan falle tilbake på stabilitetskravet i punkt a. Vha

$$\frac{d}{dx}F(F(x)) = F'(F(x))\; F'(x) \text{ eller } \frac{d}{dx}F(F(x))|_{x=x_+} = F'(x_-)F'(x_+),$$

ser vi at stabilitetskravet er

$$|F'(x_+)F'(x_-)| < 1 \qquad \text{eller} \qquad |\left(\tfrac{7}{2}\right)^2 x_+ x_-| < 1.$$

For vårt tilfelle sjekker vi først at vi virkelig har periode to:

$$F(\tfrac{6}{7}) = 1 - \tfrac{7}{4}\tfrac{36}{49} = -\tfrac{2}{7}, \qquad \text{og} \qquad F(-\tfrac{2}{7}) = 1 - \tfrac{7}{4}\tfrac{4}{49} = \tfrac{6}{7}.$$

For å undersøke stabilitet beregner vi

$$F'(\tfrac{6}{7})\,F'(-\tfrac{2}{7}) = \frac{49}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{-2}{7} = -3.$$

Altså er *ikke* denne periode-to-iterasjonen stabil.

Oppgave 2

a) Det dynamiske systemet er et autonomt todimensjonalt system, og i to dimensjoner er attraktorene enten fikspunkter eller grensesykler (Poincaré-Bendixson). Altså kan systemet *ikke* ha en kaotisk attraktor.

b) For $b_S = 0$ er

$$\frac{dS}{dt} = r_S S - a_S S^2 = a_S\, S\left(\frac{r_S}{a_S} - S\right),$$

slik at $\dot{S} > 0$ hvis $S < r_S/a_S$ og $\dot{S} < 0$ hvis $S > r_S/a_S$. Altså vil i alle fall sauetallet gå mot fikspunktet, $S(t) \to S(\infty) = r_S/a_S$.

c) For $b_U = 0$ er

$$\frac{dU}{dt} = r_U U - a_U U^2 + C.$$

Vi ser at det er to fikspunkter. Høyre side er null for

$$U_\pm = \frac{r_U}{2a_U} \pm \sqrt{\frac{C}{a_U} + \frac{r_U^2}{4a_U^2}},$$

slik at $U_+ > 0$ og $U_- < 0$. Ved å skrive

$$\dot{U} = -a_U(U - U_+)(U - U_-)$$

ser vi at $\dot{U} > 0$ for $0 < U < U_+$ og $\dot{U} < 0$ for $U > U_+$. Altså vil ulvetallet stabilisere seg på verdien $U(\infty) = U_+$.

d) Vi setter

$$S = \frac{r}{a_S}\, s \qquad \text{og} \qquad U = \frac{r}{a_U}\, u,$$

Det gir

$$\frac{1}{r}\,\frac{ds}{dt} = s - s^2 - \frac{b_S r^2}{a_U}\, su \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{du}{dt} = u - u^2 - \frac{b_U r^2}{a_S}\, su + \frac{a_U C}{r}. \tag{2}$$

Altså er

$$\tau = rt, \qquad \alpha = \frac{b_S}{a_U}, \qquad \beta = \frac{b_U}{a_S}, \qquad \text{og} \qquad c = \frac{a_U C}{r^2}.$$

e) Fikspunktene fås ved å nullstille høyresidene:

$$\begin{aligned} s(1-s-\tfrac{1}{2}u) &= 0 &(3)\\ u(1-u-2s)+c &= 0 &(4) \end{aligned}$$

Likning (3) har to løsninger. Ta først $s = 0$. Innsatt i (4) fås da $u^2 - u = c$, dvs

$$u = u_\pm = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{c + \tfrac{1}{4}}.$$

Likning (3) er også tilfredsstilt for $s = 1 - \frac{1}{2}u$ som innsatt i (4) gir

$$u(1-u-2+u)+c = 0 \qquad \text{dvs} \qquad u = c.$$

Det er følgelig tre fikspunkter

$$\begin{aligned} F_1 &: \quad s=0, \quad u = \tfrac{1}{2} + \sqrt{c+\tfrac{1}{4}} &(5)\\ F_2 &: \quad s=0, \quad u = \tfrac{1}{2} - \sqrt{c+\tfrac{1}{4}} &(6)\\ F_3 &: \quad s = 1-\tfrac{1}{2}c, \quad u = c &(7) \end{aligned}$$

f) For å undersøke karakteren til fikspunktene for et dynamisk system $ds/d\tau = f(s,u)$; $du/d\tau = g(s,u)$ beregner vi egenverdiene til Jacobi-determinanten

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2s-\frac{1}{2}u & -\frac{1}{2}s \\ -2u & 1-2u-2s \end{pmatrix} \qquad (8)$$

For fikspunktene F_1 og F_2 er $s = 0, u = u_\pm$ og derfor

$$J = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}u_\pm & 0 \\ -2u_\pm & 1-2u_\pm \end{pmatrix},$$

med egenverdier

$$\lambda_1 = 1 - \tfrac{1}{2}u_\pm = \tfrac{1}{4}(3 \mp \sqrt{1+4c}); \qquad \lambda_2 = 1 - 2u_\pm = \mp\sqrt{1+4c}. \qquad (9)$$

I begge tilfeller er egenverdiene reelle. For F_2 (nedre fortegn) er begge egenverdier positive, slik at F_2 er et <u>ustabilt (frastøtende) knutepunkt</u>. For F_1 er $\lambda_2 < 0$, og for $c = 0.25$ er $\lambda_1 = (3-\sqrt{2})/4$ positiv, altså er F_1 et <u>sadelpunkt</u> for denne verdien av c.

For det tredje fikspunktet $F_3 = (s = \frac{7}{8}, u = \frac{1}{4})$ for $c = 1/4$, får vi

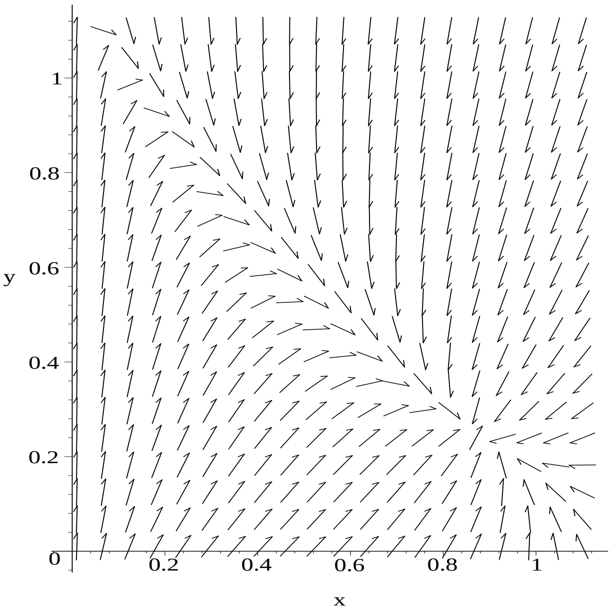
$$J = \begin{pmatrix} -\frac{11}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

Egenverdilikningen blir

$$(-\frac{11}{8} - \lambda)(-\frac{5}{4} - \lambda) - \frac{3}{8}\frac{1}{2} = 0 \text{ eller } \lambda^2 + \frac{21}{8}\lambda + \frac{23}{24} = 0.$$

Siden summen av egenverdiene er $-21/8 < 0$ og produktet $23/24 > 0$ må begge egenverdiene være negative. Altså er F_3 et stabilt (tiltrekkende) knutepunkt for denne verdien av c.

For store s og u er $\dot{s} < 0$ og $\dot{u} < 0$. Fasepunktene kan derfor ikke vandre til uendelig, og må nødvendigvis ende opp i det ene tiltrekkende knutepunktet F_3, som tilsvarer $s(\infty) = \frac{7}{8}$ og $u(\infty) = \frac{1}{4}$. I dette tilfelle er det altså sameksistens mellom sau og ulv, ved følgende verdier på de dimensjonsløse bestandene: $s(\infty) = \frac{7}{8} = 0.875$; $u(\infty) = \frac{1}{4} = 0.25$. Skisse av faseportrett:

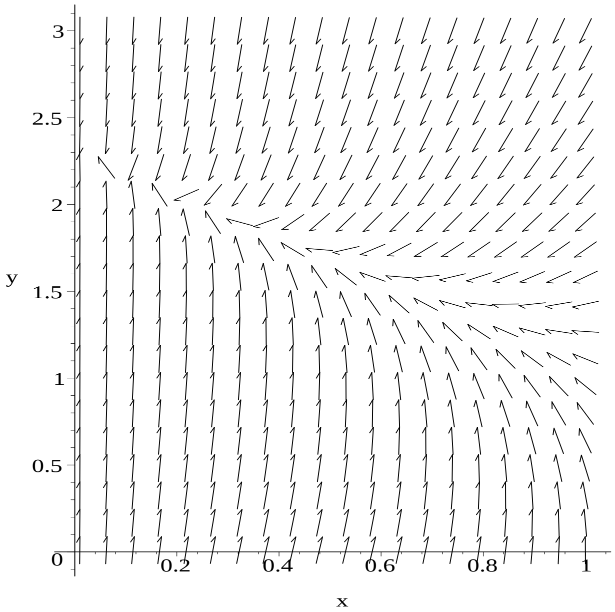


g) Når $c = 3$ er den generelle analysen som i punkt f. F_2 blir fremdeles et ustabilt knutepunkt. For fikspunktet F_1 blir nå begge egenverdiene negative, siden

$$\lambda_1 = (1 - \sqrt{13})/4 < 0 \text{ og } \lambda_2 = -\sqrt{13}/2.$$

Altså er nå F_1 et stabilt knutepunkt, og banekurvene må ende her. Koordinatene til F_1 er for denne verdien av c lik $(s, u) = (0, 1 + \sqrt{13})/2) = (0, 2.30)$.

I dette tilfellet blir sauene fullstendig utryddet, mens ulvebestanden stabiliserer seg på $u(\infty) = 2.30$, i dimensjonsløse variable. Skisse av faseportrett:



Oppgave 3

a) En permanent bølge er av formen $u(x,t) = u(x-ct)$, med konstant hastighet c; den propagerer med uendret form.

En solitær bølge er en *lokalisert* permanent bølge, slik at alle endringer av formen skjer over et endelig x-intervall.

Solitoner er solitære bølger som overlever kollisjoner med hverandre.

Ulike solitontyper: (i) Pulsformede solitoner, som for KdV-likningen, (ii) envelope-solitoner, som for den kubiske Schrödinger-likningen, (iii) kink-solitoner, med en gradient av pulsform, som for sine-Gordon-likningen,

b) Vi har

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C &= \int_{-\infty}^{\infty} u\, u_t\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (6u^2 u_x - u u_{xxx}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2u^3 - u u_{xx} + \tfrac{1}{2}u_x^2\right)_x dx \\ &= \left[2u^3 - u u_{xx} + \tfrac{1}{2}u_x^2\right]_{-\infty}^{\infty} = 0\end{aligned}$$

for en lokalisert puls der u og u_x forsvinner for $x \to \pm\infty$. Altså er C en bevegelseskonstant.

c) Egenspektret er invariant i tida, slik at hvert soliton tilsvarer en av egenverdiene i det opprinnelige potensial $u(x, 0)$. Den oppgitte solitonløsningen tilsvarer $m = 1$. Med $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{c}$ er egenverdien for et enkelt soliton $\lambda = -\alpha^2 = -c/4 =$ halve amplituden.

For $m = 10$ vil startprofilet resultere i 10 solitoner, med hastigheter lik $c_n = 4n^2\alpha^2$ og amplituder etter det ovenstående lik det halve, dvs lik $a_n = -2n^2\alpha^2$, for $n = 1, 2, \ldots, 10$. Siden de største solitonene propagerer raskest, og siden solitonhastigheten er proporsjonal med amplituden, vil det resulterende bølgetog bestå av ti solitoner som danner et triangulært mønster med de høyeste i front.