EKSAMEN 9.MAI 1996 I IKKELINEÆR DYNAMIKK
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Likevektspunkter fås ved å nullstille høyresidene i det dynamiske system:

$$x(3-x-2y) = 0 \quad (1)$$
$$y(2-x-y) = 0. \quad (2)$$

Den første likningen har et nullpunkt i $x=0$. Med denne verdien blir (2): $y(2-y)=0$, med løsninger $y=0$ og $y=2$.

Dersom $x \neq 0$ gir (1) $x = 3-2y$, som innsatt i (2) gir $y(y-1)$, med løsninger $y=0$ og $y=1$. De tilhørende x-verdier er $x=3$ og $x=1$.

De fire fikspunktene $F_n = (x^*, y^*)$ er derfor

$$\begin{array}{ll} F_1: & (0,0) \\ F_2: & (0,2) \\ F_3: & (3,0) \\ F_4: & (1,1) \end{array}$$

b) For å undersøke fikspunktenes stabilitet lineariserer vi bevegelseslikningene rundt fikspunktene.

$\underline{F_1}$: Nær origo er de lineariserte likningene

$$\dot{x} = 3x \text{ og } \dot{y} = 2y$$

med løsning:

$$x(t) = x(0)e^{3t} \text{ og } y(t) = y(0)e^{2t}.$$

Dette viser at origo er et <u>ustabilt</u> fikspunkt, et ustabilt fokus.

$\underline{F_2}$: Med $\tilde{y} = y - y^* = y - 2$ blir de lineariserte likningene:

$$\dot{x} = -x \text{ og } \dot{\tilde{y}} = -2x - 2\tilde{y}.$$

Den første likningen har løsning

$$x(t) = x(0)e^{-t},$$

og den andre

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}(0)e^{-2t} + 2x(0)e^{-t}.$$

Det viser at x og $\tilde{y}$ går mot null når t øker; fikspunktet er <u>stabilt</u>. En trengte ikke være så eksplisitt. Innsetting av $x \propto e^{st}$ og $\tilde{y} \propto e^{st}$ i likningene gir to homogene lineære likninger

$$\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0$$

Systemdeterminanten lik null gir $s = -1$ eller $s = -2$, begge muligheter svarer til avvik fra fikspunktet som går mot null med økende t, dvs stabilitet.

$\underline{F_3}$: Med $\tilde{x} = x - x^* = x - 3$ blir de lineariserte likningene:

$$\dot{\tilde{x}} = -3\tilde{x} - 6y \text{ og } \dot{y} = -y.$$

Innsetting av tidsavhengighet e^{st} gir i dette tilfellet

$$\begin{pmatrix} s+3 & 6 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y \end{pmatrix} = 0$$

I dette tilfellet forsvinner systemdeterminenten for $s = -3$ og $s = -1$, så F_3 er også <u>stabilt</u>.

$\underline{F_4}$: Med $\tilde{x} = x - 1$ og $\tilde{y} = y - 1$ blir de lineariserte likningene

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} - 2\hat{y} \text{ og } \dot{\hat{y}} = -\hat{x} - \hat{y}.$$

Med tidsavhengighet $\propto e^{st}$ fås likningssystemet

$$\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0.$$

I dette tilfellet forsvinner systemdeterminanten for $(s+1)^2 = 2$, dvs

$$s = -1 \pm \sqrt{2}.$$

En s-verdi er positiv, den andre negativ, så fikspunktet er et sadelpunkt. Et fasepunkt i nærheten strømmer alltid bort fra fikspunktet bortsett fra punkter på en kurve C gjennom fikspunktet.

c) For $y(0) = 0$ forblir etter likning (2) $y(t) = 0$, mens $\dot{x} = x(3 - x)$, negativt for $x > 3$ og positivt for $0 < x < 3$. På x-aksen strømmer derfor fasepunktet alltid mot fikspunktet $x^* = 3$.

For $x(0) = 0$ forblir $x(t) = 0$, likning (1), mens $\dot{y} = y(2 - y)$. Dette viser at også langs den positive y-aksen strømmer fasepunkter mot fikspunktet, her i $y = 2$.

For store x og y vil vi ha $\dot{x} < 0$ og $\dot{y} < 0$: Fasepunktene strømmer mot mindre verdier.

Hvordan skal vi få et sammenhengende faseportrett ut av dette? Alle fasepunkter vil altså havne i fikspunktene F_2 eller F_3, bortsett fra dem som ligger ligger på kurven C; de havner i F_4. Kurven C må derfor være grensekurven (separatrisen) mellom nedslagsfeltene til de stabile fikspunktene F_2 og F_3, og faseportrettet må ha følgende topologi:

Siden nesten enhver begynnelsestilstand havner i F_2 eller F_3 der en av artene er utdødd, må en si at modellen er i overensstemmelse med prinsippet om konkurranseutelukkelse.

Oppgave 2

a) La oss først vise at

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} u^n(x,t)\, dx = C_n = \text{ tidsuavhengig,}$$

for $n = 1$ og $n = 2$. Det følger enkelt ved å derivere med hensyn på t:

$$\frac{dI_n}{dt} = n \int u^{n-1} u_t\, dx = n \int u^{n-1}(6uu_x - u_{xxx})\, dx$$

For $n = 1$ er dette $[3u^2 - u_{xx}]_{-\infty}^{\infty} = 0$ for en lokalisert puls. For $n = 2$ er det

$$[2u^3 - uu_{xx} - \tfrac{1}{2}u_x^2]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Så tyngdepunktet:

$$\frac{dX_T}{dt} = C_1^{-1} \int x u_t\, dx = C_1^{-1} \int x(6uu_x - u_{xxx})\, dx = C_1^{-1} \int (3u^2 - u_{xxx})\, dx = 3C_2/C_1$$

ved en delvis integrasjon. Altså er tyngdepunktsfarten konstant.

b) Potensialene $u(x,0)$ og $u(x,t)$ har samme egenverdier.

Antall egenverdier i det assosierte Schrödingerproblemet er antall solitoner. En solitær bølge er ett soliton, og et bølgeprofil som tilsvarer et refleksjonsløst potensial med 1 egenverdi. Potensialet $(m = 1)$

$$u(x) = -\frac{\alpha^2}{\cosh^2[\alpha(x - \text{konstant})]}$$

er refleksjonsløst og har 1 egenverdi. Konstanten tilsvarer bare valg av origo på x-aksen. Sammenlikning med KdV-solitonet

$$u = \frac{A}{\cosh^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0 - ct)]}$$

viser at $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{c}$, og