Eksamen i ikkelineær dynamikk, fag 74 993
Onsdag 6. mai 1998
Løsninger

1a) En permanent bølge forandrer ikke form. Dvs. at hvis den forplanter seg med en konstant hastighet c i en rom-dimensjon, så er bølgeprofilen $u(x,t)$, som funksjon av romkoordinaten x og av tiden t, en funksjon av bare en variabel $\xi = x - ct$. Altså: $u(x,t) = \phi(x - ct)$.
Et soliton er en permanent bølge som er lokalisert, dvs. at $u(x,t)$ og alle dens deriverte mhp. x går mot 0 når $|x| \to \infty$, og som dessuten er stabil i den forstand at den bevarer form, asymptotisk når $t \to \pm\infty$, ved kollisjoner med andre lokaliserte bølger (som ikke behøver være solitoner).

1b) At feltene u og $u + \delta u$ begge er løsninger av sine–Gordon-ligningen, betyr at

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \sin u &= 0 \ , \\ (u+\delta u)_{tt} - (u+\delta u)_{xx} + \sin(u+\delta u) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Når δu er en infinitesimal perturbasjon, og vi trekker den ene ligningen fra den andre, får vi at

$$\delta u_{tt} - \delta u_{xx} + (\cos u)\, \delta u = 0 \ .$$

1c) For å vise at energien E er en bevegelseskonstant, regner vi ut den tidsderiverte. Når vi setter inn fra sine–Gordon-ligningen, får vi at

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, (u_t u_{tt} + u_x u_{xt} + (\sin u)\, u_t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) = u_x u_t |_{-\infty}^{\infty} = 0 \ . \end{aligned}$$

Integranden i integralet for E er energitettheten, kall den $\rho = \rho(x,t)$. Beviset ovenfor, for at energien er bevart, går ut på å finne et uttrykk for energistrømmen $j = j(x,t)$ slik at kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} = 0$$

er oppfylt som en konsekvens av sine–Gordon-ligningen. Løsningen er $j = -u_x u_t$.
Energitettheten består av tre ledd som hver for seg er ikke-negative. De tre integralene må være endelige hver for seg for at E skal bli endelig. Det betyr at den tidsderiverte u_t og den romderiverte u_x begge må være kvadratisk integrerbare fra $-\infty$ til ∞, og at funksjonen $1 - \cos u$ må være integrerbar.
Den enkleste måten å oppnå det på, er at $u_t \to 0$, $u_x \to 0$ og $1 - \cos u \to 0$ "tilstrekkelig raskt" når $|x| \to \infty$. Det betyr spesielt for den asymptotiske oppførselen til u i grensene $x \to \pm\infty$ at $u \to 2m\pi$ når $x \to -\infty$ og at $u \to 2n\pi$ når $x \to \infty$, med m og n heltallige. Hvis $m \neq n$, betyr det at løsningen inneholder ett eller flere solitoner.

1d) Den oppgitte løsningen $\varphi(x) = 4 \arctan \mathrm{e}^x$ er uavhengig av tiden t. Den ligningen som vi skal vise er oppfylt, er derfor

$$-\varphi''(x) + \sin(\varphi(x)) = 0 \ .$$

Vi har at

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \frac{4\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{2}{\cosh x}\;, \\
\varphi'' &= -\frac{2\sinh x}{\cosh^2 x}\;.
\end{aligned}$$

Definer $\chi = \arctan \mathrm{e}^x$. Da har vi f.eks. at

$$\begin{aligned}
\sin(2\chi) &= \frac{2\sin\chi\,\cos\chi}{\cos^2\chi+\sin^2\chi} = \frac{2\tan\chi}{1+\tan^2\chi} = \frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{\cosh x}\;, \\
\cos(2\chi) &= \frac{\cos^2\chi-\sin^2\chi}{\cos^2\chi+\sin^2\chi} = \frac{1-\tan^2\chi}{1+\tan^2\chi} = \frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -\tanh x\;, \\
\sin\varphi &= \sin(4\chi) = 2\sin(2\chi)\cos(2\chi) = -\frac{2\sinh x}{\cosh^2 x}\;.
\end{aligned}$$

Følgelig er $-\varphi'' + \sin\varphi = 0$, som vi skulle vise.
Vi har videre at

$$(\cos\varphi)\,\varphi' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\sin\varphi = -\frac{2}{\cosh x} + \frac{4\sinh^2 x}{\cosh^3 x} = \frac{2}{\cosh x} - \frac{4}{\cosh^3 x}\;,$$

og det gir at

$$\cos\varphi = 1 - \frac{2}{\cosh^2 x}\;,$$

forøvrig det resultatet som skulle vises under neste punkt.
Vi får da at

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\left(\frac{1}{2}\,(\varphi')^2 + 1 - \cos\varphi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{4}{\cosh^2 x} = 4\tanh x|_{-\infty}^{\infty} = 8\;.$$

Ved speiling om origo, $x \to -x$, får vi løsningen $4\arctan \mathrm{e}^{-x}$, et antitvinn.
Ved translasjon en avstand a får vi løsningen $4\arctan \mathrm{e}^{x-a}$.
Begge disse nye løsningene har uforandret energi, $E = 8$
(det ser en lett ved å bytte integrasjonsvariabel).
Ved Lorentz-transformasjon får vi løsningen $4\arctan \mathrm{e}^{(x-ct)/\sqrt{1-c^2}}$, den beveger seg med konstant bølgeprofil og med konstant hastighet c (vi må forutsette at $|c| < 1$).
Siden den opprinnelige løsningen hadde energi 8 og impuls 0, vil den Lorentz-transformerte løsningen ha energi

$$E = \frac{8}{\sqrt{1-c^2}}\;.$$

1e) Vi har allerede vist at $V(x) = 1 - (2/\cosh^2 x)$.
Schrödinger-ligningen

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right)\psi(x) = \epsilon\psi(x)\;,$$

med $\psi = \varphi'$ og med $\epsilon = 0$, følger direkte ved derivasjon av sine–Gordon-ligningen $-\varphi'' + \sin\varphi = 0$.

At bølgefunksjonen ψ er grunntilstanden, slutter vi av at den ikke har noe nullpunkt. Grunntilstandsenergien kan nemlig finnes ved minimalisering av

$$\frac{1}{\mathcal{N}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(-\phi\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+V\phi\right)=\frac{1}{\mathcal{N}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2+V\phi^2\right),$$

der bølgefunksjonen $\phi = \phi(x)$ varieres og $\mathcal{N}$ er normeringsintegralet for ϕ,

$$\mathcal{N}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\phi^2\ .$$

Ved å velge en funksjon ϕ uten nullpunkt minimaliserer vi bidraget fra $(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)^2$, som er positivt (dette bidraget tolkes i kvantemekanikken som forventningsverdien av den kinetiske energien).

1f) For å undersøke om fikspunktet er stabilt eller ustabilt, må vi undersøke tidsavhengige infinitesimale perturbasjoner $\delta u = \delta u(x,t)$. Ligningen for δu fant vi under punkt 1b), nemlig

$$\delta u_{tt}-\delta u_{xx}+(\cos\varphi)\,\delta u=0\ .$$

Siden dette er en lineær ligning for δu, Fourier-transformerer vi mhp. tiden. Det vil si at vi studerer løsninger med eksponensiell tidsavhengighet,

$$\delta u(x,t)=\delta w(x)\,\mathrm{e}^{\lambda t}\ .$$

Her er λ en Lyapunoveksponent. Da får vi Schrödinger-ligningen,

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right)\delta w(x)=-\lambda^2\,\delta w(x)\ .$$

Under punkt 1e) konkluderte vi med at egenverdien $-\lambda^2$ har 0 som nedre grense, dvs. at alle Lyapunoveksponentene er rent imaginære. Det finnes altså ingen mulige infinitesimale perturbasjoner som divergerer eksponensielt.
Siden rent imaginære Lyapunoveksponenter er et marginalt tilfelle når det gjelder stabilitet, burde vi strengt tatt studere den perturberte sine–Gordon-ligningen til andre orden i δu, men så grundig til verks går vi ikke her.

2a) Hvis $f(x_*) = x_*$, og ϵ er liten, så er

$$f(x_*+\epsilon)=x_*+f'(x_*)\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\ .$$

Hvis derfor $|f'(x_*)| < \delta < 1$, så vil det være mulig å velge ϵ liten nok til at

$$|f(x_*+\epsilon)-x_*|<\delta\,|\epsilon|\ .$$

Hvis vi betegner den n ganger itererte funksjonen med f^n, har vi da at

$$|f^n(x_*+\epsilon)-x_*|<\delta^n\,|\epsilon|\ .$$

Det viser at iterasjonen konvergerer mot x_*, som altså er et stabilt fikspunkt. Hvis i stedet $|f'(x_*)| > \delta > 1$, gjelder den motsatte ulikheten for små nok ϵ,

$$|f(x_*+\epsilon)-x_*|>\delta\,|\epsilon|\ .$$

I så fall er fikspunktet ustabilt.
For den oppgitte n-syklusen har vi at x_0, eller en hvilken som helst x_k, er et fikspunkt for f^n, altså at $f^n(x_0) = x_0$. Dvs. at n-syklusen er stabil eller ustabil alt etter om den deriverte

$$[f^n]'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f^n(x_0)}{\mathrm{d}x_0}$$

er mindre eller større enn 1 i absoluttverdi. I følge kjerneregelen er

$$[f^n]'(x_0) = f'(x_{n-1}) \cdots f'(x_1)\, f'(x_0) \ .$$

Eller, samme formel skrevet på en annen måte,

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_0} = \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_{n-1}} \cdots \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_0} \ .$$

Stabilitetsbetingelsen er derfor at

$$\big|[f^n]'(x_0)\big| = \big|f'(x_{n-1})\big| \cdots \big|f'(x_1)\big|\ \big|f'(x_0)\big| < 1 \ .$$

2b) Definisjonen på funksjonen g er at $g(h(x)) = h(f(x))$ for et vilkårlig punkt x.
Dvs. at $gh = hf$, eller ekvivalent $g = ghh^{-1} = hfh^{-1}$. Vi skriver f.eks. hf for en funksjon som er sammensetningen av de to funksjonene h og f, først f og så h.
Dersom x_* er et fikspunkt for f, dvs. $f(x_*) = x_*$, og videre $y_* = h(x_*)$, så er

$$g(y_*) = g(h(x_*)) = h(f(x_*)) = h(x_*) = y_* \ ,$$

som viser at y_* er et fikspunkt for g.
Betingelsen for at x_* er et stabilt fikspunkt for f, er at $|f'(x_*)| < 1$.
Betingelsen for at y_* er et stabilt fikspunkt for g, er at $|g'(y_*)| < 1$.
Vi skal vise at disse to betingelsene er ekvivalente.
Det følger av at $g'(y_*) = f'(x_*)$, som bevises slik:
Ved derivasjon av ligningen $g(h(x)) = h(f(x))$ får vi at $g'(h(x))\, h'(x) = h'(f(x))\, f'(x)$.
Innsatt $x = x_*$ gir det at

$$g'(y_*)\, h'(x_*) = h'(x_*)\, f'(x_*) \ ,$$

og dermed $g'(y_*) = f'(x_*)$.
At stabilitetskriteriet for en n-syklus, nemlig $|[f^n]'(x_0)| < 1$, er koordinatuavhengig, følger ganske direkte. Vi har at

$$g^n = (hfh^{-1})^n = hfh^{-1} \cdots hfh^{-1}hfh^{-1} = hf^nh^{-1} \ .$$

På samme måte som ovenfor beviser vi da at $[g^n]'(y_0) = [f^n]'(x_0)$.
Lyapunov-eksponenten for iterasjonen $x_{k+1} = f(x_k)$ er

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_k)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|[f^n]'(x_1)| \ ,$$

mens Lyapunov-eksponenten for iterasjonen $y_{k+1} = g(y_k)$ er

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|[g^n]'(y_1)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big(\ln|h'(x_{n+1})| + \ln|[f^n]'(x_1)| + \ln|[h^{-1}]'(y_1)|\Big) \ .$$

Forutsatt at den deriverte h' er en begrenset funksjon, slik at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|h'(x_{n+1})| = 0 \ ,$$

så gjelder at $\lambda = \mu$. Lyapunoveksponenten er dermed koordinatuavhengig.

2c) Fire slags attraktorer:
stabile fikspunkt, med tre negative Lyapunov-eksponenter;
grensesykler, med to negative Lyapunov-eksponenter, den tredje lik 0;
toruser, med en negativ Lyapunov-eksponenter og to lik 0;
bisarre attraktorer, med en negativ Lyapunov-eksponent, en lik 0 og den tredje positiv.
Den ene Lyapunov-eksponenten som alltid er lik 0, unntatt for et stabilt fikspunkt, svarer til en infinitesimal perturbasjon av startpunktet i den retningen i rommet som er tangent til banen.

2d) Gitt måleserien $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
Takens's metode til å imitere et faserom går på å velge en dimensjon d, og så "tegne" en attraktor som består av følgende punkter i d dimensjoner:
$(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $(x_2, x_3, \ldots, x_{d+1})$, opp til $(x_{N-d+1}, x_{N-d+2}, \ldots, x_N)$.
Hvis d bare velges stor nok, viser det seg at denne metoden gir brukbare estimat av f.eks. dimensjonen til en attraktor.

2e) Bruk Takens's metode med dimensjonen $d = 2$, dvs. tegn en kurve med x_{k+1} som funksjon av x_k for $k = 1, 2 \ldots, 8$ (de 8 punktene vil i hvert fall antyde en kurve).
Den første listen gir da en parabel, mens den andre gir en mer irregulær kurve.
Et godt tips er altså at den første listen er generert ved en kaotisk iterasjon av en "glatt" funksjon, mens den andre er en liste av tilfeldige tall.