Eksamen i ikkelineær dynamikk, fag 74 993
Onsdag 10. mai 2000
Løsninger

1a) (Her er et svar litt lenger enn nødvendig:)
Iterasjonen $x \mapsto f(x) = ax(1-x)$ har et fikspunkt $x_* = f(x_*)$ med $a(1-x_*) = 1$, dvs. $x_* = 1-(1/a)$. Dette fikspunktet er stabilt dersom $f'(x_*) = a(1-2x_*) = 2-a \in \langle -1, 1\rangle$. Når parameteren a øker forbi verdien $a = a_1 = 3$, blir fikspunktet ustabilt, og det skjer idet $f(x_*) = -1$. Den itererte funksjonen $g(x) = f^2(x) = f(f(x))$ har også x_* som fikspunkt, og dens deriverte der er $g'(x_*) = f'(f(x_*))\, f'(x_*) = (f'(x_*))^2 = (2-a)^2$. For a litt større enn 3 er altså $g'(x_*) > 1$, og derfor oppstår det to nye fikspunkt for $g(x)$, som ikke er fikspunkt for $f(x)$, men derimot en syklus med periode 2: $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$. Det er lett å finne eksplisitte uttrykk: ligningene

$$x_2 = ax_1(1-x_1)\ , \qquad x_1 = ax_2(1-x_2)\ ,$$

løses ved at de subtraheres fra hverandre, siden $x_1 \neq x_2$ kan vi dividere med $x_2 - x_1$, og vi finner at

$$1 = a(-1 + x_1 + x_2)\ .$$

Sammen med ligningene ovenfor gir det at

$$x_1 = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}\ , \qquad x_2 = \frac{a+1 \mp \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}\ .$$

Både x_1 og x_2 er fikspunkter for $x \mapsto g(x)$, med $g'(x_1) = g'(x_2) = 5 - (a-1)^2$. Vi ser at når a øker, så avtar $g'(x_1)$ fra 1, for $a = a_1 = 3$, til -1, for $a = a_2 = 1 + \sqrt{6}$. Ved denne verdien av a gjentar prosessen seg, og det oppstår en periode 2 for iterasjonen $x \mapsto g(x)$, som er en periode 4 for iterasjonen $x \mapsto f(x)$.
Det stopper ikke der, men når a øker, får vi en periodedoblingskaskade: hver gang en syklus av periode 2^n blir ustabil, oppstår det en ny stabil syklus med periode 2^{n+1}. Dette skjer uendelig mange ganger i et endelig intervall for parameteren a. De kritiske parameterverdiene $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ der periodedoblingene skjer, konvergerer nemlig geoemtrisk, dvs. at

$$a_n \to a_\infty - \frac{c}{\delta^n}\ ,$$

der c er en konstant, og $\delta = 4,6692016\ldots$ er en av Feigenbaums to konstanter.
Lignende periodedoblingskaskader forekommer i mange ulike dynamiske system, enten de beskrives av diskrete avbildninger, med en eller flere variable, eller av differensialligninger med kontinuerlig tid t og mange variable $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$. Det som skal til, for eksempel i det siste tilfellet, er at en periodisk bane med periode T blir ustabil ved at en av egenverdiene til matrisen

$$\frac{\partial(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_N(T))}{\partial(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_N(0))}$$

blir lik -1, mens alle de andre egenverdiene er mindre enn 1 i absoluttverdi.
At to ulike dynamiske system er i samme universalitetsklasse, med hensyn til periodedoblingskaskader, vil si at de begge karakteriseres av de samme Feigenbaumkonstantene δ og α.

1b) Begrepet tangentbifurkasjon illustreres i figur 1. Med $a = 3.83$ har iterasjonen $x \mapsto f^3(x)$ et stabilt og et ustabilt fikspunkt, som altså er en stabil og en ustabil syklus med periode 3 for iterasjonen $x \mapsto f(x)$. Ingen av de to syklusene eksisterer for $a = 3.827$, like under den kritiske verdien av a (som er $a = 1 + 2\sqrt{2} = 3.828427\ldots$). De oppstår sammen idet kurven $(x, f^3(x)$ tangerer den diagonale linjen (x, x).
For verdier av a like under den kritiske verdien har vi intermittent dynamikk, dvs. i dette tilfellet at systemet fanges en viss tid i noe som nesten er en syklus med periode 3, deretter beveger det seg tilnærmet kaotisk, før det fanges på nytt i den samme tilnærmete syklusen, og så videre. Intermittent dynamikk er altså karakterisert av "rolig", regelmessig bevegelse i kortere eller lengre tidsrom, avbrutt av mellomspill med mer "aktiv", kaotisk bevegelse.

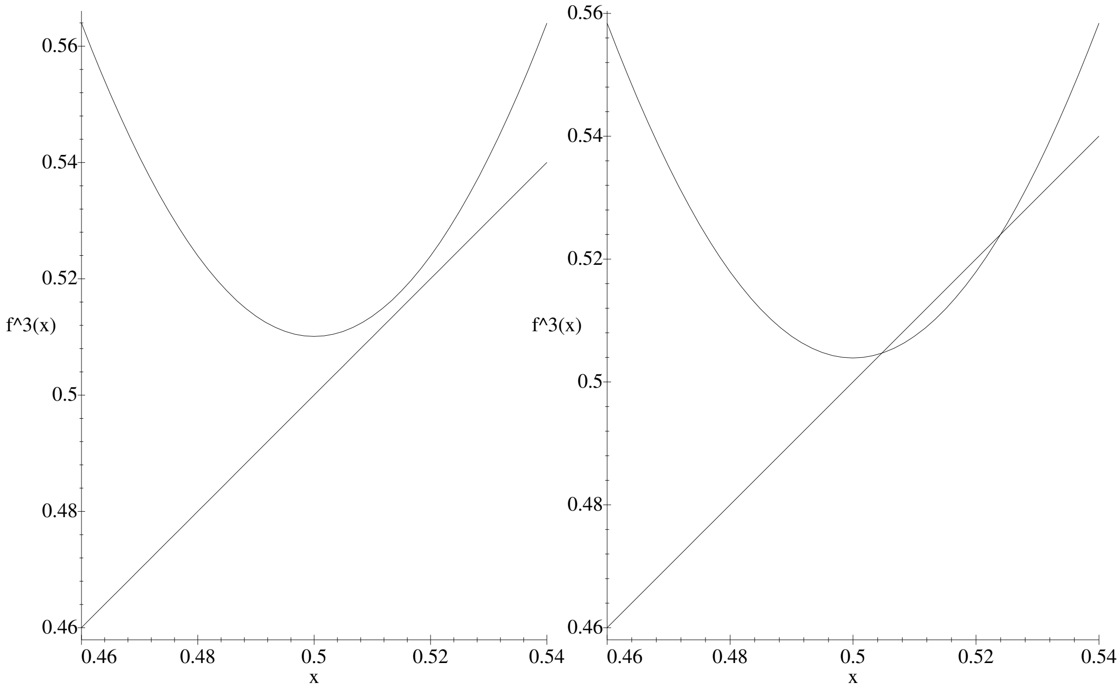

Figure 1: Den tredje itererte $f^3(x) = f(f(f(x)))$ av funksjonen $f(x) = ax(1-x)$, til venstre med $a = 3.827$, til høyre med $a = 3.83$.

2a) At systemet er autonomt betyr at bevegelsesligningen ikke har noen eksplisitt tidsavhengighet, bare en implisitt tidsavhengighet gjennom variablene $F = F(t)$ og $S = S(t)$.
I et autonomt system er hastigheten i et punkt i faserommet entydig gitt, derfor kan to baner aldri krysse hverandre. I to dimensjoner impliserer det at en attraktor må være enten et stabilt fikspunkt eller en grensesyklus (Poincaré–Bendixsons teorem).

2b) Vi innfører at som ny tidsvariabel istedenfor t, da kan ligningene skrives slik, etter at de er dividert med a:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \quad F - \frac{c}{a} FS \ , \\ \dot{S} &= -\frac{b}{a} S + \frac{c}{a} FS \ . \end{aligned}$$

Videre multipliserer vi disse ligningene med c/a og definerer $x = cF/a$ og $y = cS/a$, det gir ligningene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad x - xy \ , \\ \dot{y} &= -By + xy \ . \end{aligned}$$

Her er altså $B = b/a$.

2c) Vi skal vise at $\dot{K} = 0$, der $K = x + y - B \ln |x| - \ln |y|$ (K er definert bare for $x \neq 0$ og $y \neq 0$). Vi har at

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \dot{x} + \dot{y} - B \frac{1}{|x|} \frac{|x|}{x} \dot{x} - \frac{1}{|y|} \frac{|y|}{y} \dot{y} = \left(1 - \frac{B}{x}\right) \dot{x} + \left(1 - \frac{1}{y}\right) \dot{y} \\ &= \frac{x - B}{x} (x - xy) + \frac{y - 1}{y} (-By + xy) = 0 \ . \end{aligned}$$

2d) Fikspunktene er gitt ved at $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = 0$, dvs:

$$f \equiv x(1 - y) = 0 \ , \qquad g \equiv (x - B)y = 0 \ .$$

For $B > 0$ finnes to løsninger: $(x, y) = (0, 0)$ og $(x, y) = (B, 1)$.
For å undersøke stabiliteten til et fikspunkt må vi undersøke egenverdiene til Jacobimatrisen

$$\mathbf{D} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & x - B \end{pmatrix}$$

i dette fikspunktet. For fikspunktet $(x, y) = (0, 0)$ er

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} ,$$

og egenverdiene er 1 og $-B$. Den ene er positiv og den andre negativ, dvs. at fikspunktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt. Egenvektoren til den positive egenverdien 1 er $(1, 0)$, altså x-aksen, den definerer en ustabil retning ut fra fikspunktet. Egenvektoren til den negative egenverdien $-B$ er $(0, 1)$, y-aksen, og den definerer en stabil retning ut fra fikspunktet.

For fikspunktet $(x, y) = (B, 1)$ er

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

og egenverdiene er $\pm \mathrm{i}\sqrt{B}$. Begge egenverdiene har realdel lik 0, og da er stabiliteten marginal, slik at vi må undersøke den nærmere før vi kan trekke en konklusjon.
I den lineære tilnærmelsen for bevegelsesligningene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -B(y - 1) \ , \\ \dot{y} &= x - B \ , \end{aligned}$$

er løsningen en periodisk bevegelse omkring fikspunktet,

$$(x, y) = (B + A\omega \cos(\omega(t - t_0)), 1 + A \sin(\omega(t - t_0))) \ ,$$

der $\omega = \sqrt{B}$ er vinkelfrekvensen, mens A og t_0 er integrasjonskonstanter.
Vi kunne f.eks. se på andrederiverte av F og G med hensyn på x og y, men i dette tilfellet har vi en enklere metode, fordi vi kjenner en bevegelseskonstant
$K = x + y - B \ln |x| - \ln |y|$.
La (x_1, y_1) være et punkt i nærheten av $(B, 1)$, og definer $K_1 = x_1 + y_1 - B \ln |x_1| - \ln |y_1|$.
Om systemet starter i (x_1, y_1), så vil bevegelsen følge kurven $K = K_1$.
Vi har at $K = K_x + K_y$, om vi definerer $K_x = x - B \ln |x|$ og $K_y = y - \ln |y|$, og vi har at fikspunktet $(B, 1)$ er et lokalt minimum for både K_x og K_y. Følgelig definerer ligningen $K = K_1$ en lukket kurve omkring fikspunktet $(B, 1)$. Det viser at dette fikspunktet er stabilt: en bevegelse som starter nær fikspunktet, holder seg nær til enhver tid.
En annen måte å si det på, er at fikspunktet $(B, 1)$ er omgitt av stabile periodiske baner, den fullstendige analysen gir altså samme konklusjon som den lineære stabilitetsanalysen..

2e) Faseportrettet i dette tilfellet er det samme som et konturplott av bevegelseskonstanten $K = x + y - B \ln |x| - \ln |y|$, som vist i figur 2 for den bestemte parameterverdien $B = 1/2$. Systemet beveger seg nettopp lags kurvene $K =$ konstant. De fire kvadrantene er isolert fra hverandre ved at $K \to \infty$ når enten $x \to 0$ eller $y \to 0$. I første kvadrant er bevegelsen periodisk, mot urviseren, i de andre kvadrantene beveger systemet seg inn fra $|y| = \infty$ og ut mot $|x| = \infty$.

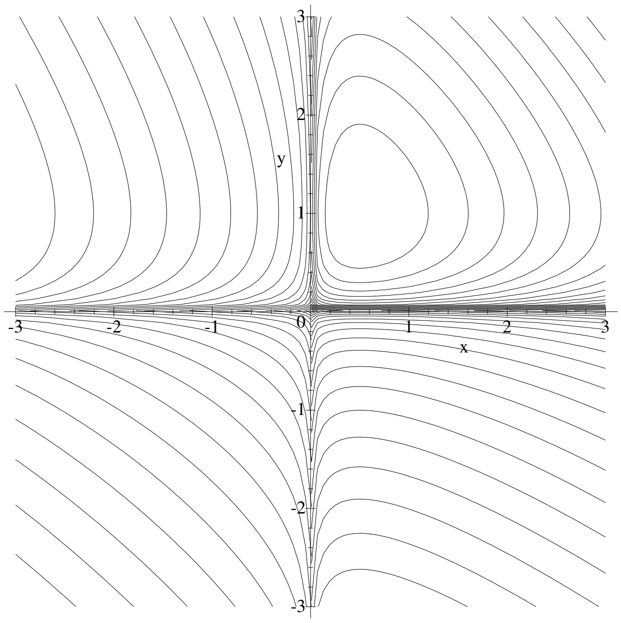

Figure 2: Faseportrett, dvs. konturplott av bevegelseskonstanten $K = x + y - B \ln |x| - \ln |y|$, for parameterverdien $B = 1/2$.

Det er to Lyapunov-eksponenter i et todimensjonalt system, og i første kvadrant er begge lik 0, fordi to nærliggende punkter hverken fjerner seg fra hverandre eksponensielt eller nærmer seg hverandre eksponensielt. Fordi bevegelsen der er periodisk, vil to punkter på samme bane ha nøyaktig samme avstand etter en periode. To punkter på to forskjellige baner har samme avstand etter ett omløp dersom de to banene har samme periode, ellers kan de forandre avstand periodisk (rettere: kvasiperiodisk), slik at avstanden er konstant om vi midler over et langt tidsintervall.
Ellers må vi bruke definisjonen på Lyapunov-eksponenter, og se på nærligende baner $(x(t), y(t))$ og $(x(t) + \xi(t), y(t) + \eta(t))$, der $\xi(t)$ og $\eta(t)$ er infinitesimale. I tillegg til de ikke-lineære bevegelsesligningene for x og y får vi lineære ligninger for ξ og η:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (1-y)\xi - x\eta \;, \\ \dot{\eta} &= y\xi + (x-B)\eta \;.\end{aligned}$$

På y-aksen, med $x = 0$, er $y = D\,\mathrm{e}^{-Bt}$ løsning av bevegelsesligningen, for en vilkårlig konstant D, og bevegelsen konvergerer mot fikspunktet i origo. Ligningene

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (1 - D\,\mathrm{e}^{-Bt})\xi \;, \\ \dot{\eta} &= D\,\mathrm{e}^{-Bt}\,\xi - B\eta \;,\end{aligned}$$

kan løses eksplisitt, med resultat:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0\,\mathrm{e}^{t+\frac{D}{B}\,\mathrm{e}^{-Bt}} \;, \\ \eta &= \eta_0\,\mathrm{e}^{-Bt} + D\xi_0\,\mathrm{e}^{-Bt}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{t+\frac{D}{B}\,\mathrm{e}^{-Bt}} \;,\end{aligned}$$

der ξ_0 og η_0 er konstanter. I grensen $t \to \infty$ er

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0\,\mathrm{e}^{t} \;, \\ \eta &= \eta_0\,\mathrm{e}^{-Bt} + D\xi_0\,\mathrm{e}^{(1-B)t} \;.\end{aligned}$$

Det viser at Lyapunov-eksponentene er 1, når $\xi_0 \neq 0$, og $-B$, når $\xi_0 = 0$.
Merk at det generelle argumentet som sier at minst en Lyapunov-eksponent må være 0, gjelder når banen holder seg innenfor et begrenset område av faserommet, og dessuten ikke konvergerer mot et fikspunkt.
På x-aksen, med $y = 0$, er $x = C\,\mathrm{e}^{t}$ løsning av bevegelsesligningen, for en vilkårlig konstant C. Ligningene

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi - C\,\mathrm{e}^{t}\,\eta \;, \\ \dot{\eta} &= (C\,\mathrm{e}^{t} - B)\eta \;,\end{aligned}$$

har løsning:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0\,\mathrm{e}^{t} - C\eta_0\,\mathrm{e}^{t}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-Bt+C\,\mathrm{e}^{t}} \;, \\ \eta &= \eta_0\,\mathrm{e}^{-Bt+C\,\mathrm{e}^{t}} \;,\end{aligned}$$

der ξ_0 og η_0 er konstanter. Vi ser at hvis $\eta_0 = 0$, så divergerer både ξ og η når $t \to \infty$ raskere enn eksponensielt, det betyr at den ene Lyapunov-eksponenten er $+\infty$. Den

andre Lyapunov-eksponenten er 1, den svarer til at $\eta_0 = 0$, altså at vi ser på hvordan to nærliggende punkter på x-aksen fjerner seg fra hverandre.
I andre og tredje kvadrant er $x < 0$, og da er

$$\frac{\dot{y}}{y} = x - B < -B \; .$$

Det impliserer at $y \to 0$ når $t \to \infty$ raskere enn e^{-Bt}. I denne grensen er da $\dot{x} = x$, slik at den asymptotiske løsningen er

$$x = C\,\mathrm{e}^{t} \; ,$$

med en negativ konstant C. Den asymptotiske løsningen for y er

$$y = D\,\mathrm{e}^{-Bt - C\mathrm{e}^{t}} \; ,$$

og vi ser at $y \to 0$ raskere enn enhver eksponensialfunksjon. Det gir asymptotisk nøyaktig det samme som i tilfellet $y = 0$, altså at den ene Lyapunov-eksponenten er 1, mens den andre er $-\infty$.
I fjerde kvadrant er $x > 0$ og $y < 0$, det gir at

$$\frac{\dot{x}}{x} = 1 - y > 1 \; ,$$

slik at $x \to \infty$ når $t \to \infty$ raskere enn e^{t}. I denne grensen er også

$$\frac{\dot{y}}{y} = x - B \to +\infty \; ,$$

som viser at $y \to -\infty$ raskere enn enhver eksponensialfunksjon. Siden

$$x + y = K + B\ln|x| + \ln|y| \; ,$$

med K konstant, ser vi at $x + y \to +\infty$, men saktere enn x og $|y|$ hver for seg.
En naturlig gjetning ville kanskje være den asymptotiske formen

$$x + y = E\,\mathrm{e}^{Ft} \; ,$$

der E og F er positive konstanter. Men dette er umulig, fordi bevegelsesligningene for x og y gir den eksakte relasjonen

$$\dot{x} + \dot{y} = x - By \; .$$

Hvis altså $x + y = E\,\mathrm{e}^{Ft}$ så er

$$x - By = \dot{x} + \dot{y} = EF\,\mathrm{e}^{Ft} \; ,$$

og dermed

$$x = \frac{E(B+F)}{2}\,\mathrm{e}^{Ft} \; , \qquad y = \frac{E(1-F)}{1+B}\,\mathrm{e}^{Ft} \; .$$

Innsetting viser at dette ikke er en løsning av bevegelsesligningene, og dessuten konkluderte vi jo ovenfor at $y \to -\infty$ raskere enn enhver eksponensialfunksjon.
Mye tyder derfor på at enhver infinitesimal perturbasjon (ξ, η) må divergere raskere enn eksponensielt, slik at begge Lyapunov-eksponentene i fjerde kvadrant er $+\infty$.

2f) Bestanden av lemen har angivelig et maksimum hvert tredje eller fjerde år, og hvis et slikt maksimum er uvanlig stort, kalles det lemenår. I årene mellom maksima er bestanden svært liten. Denne variasjonen ligner i hvert fall kvalitativt på en syklus med stor amplityde i det systemet vi studerer her: systemet er lang tid i en tilstand der det totale antallet individer, $F + S$, er lite, men innimellom vokser bestanden raskt opp og blir stor, før den avtar raskt igjen.
Selvfølgelig er dette en overforenklet modell for lemenår, f.eks. er det i virkeligheten mange arter som påvirker hverandre.

3a) Setter vi inn ansatsen $u(x,t) = \phi(\xi)$, med $\xi = x - ct$, i sine–Gordon-ligningen, får vi ligningen

$$(c^2 - 1)\phi''(\xi) + \sin\phi(\xi) = 0 \; .$$

En mulighet er at $\phi(\xi)$ er konstant, $\phi(\xi) = n\pi$ med n heltallig, kravet om at $\cos\phi(\xi) \to 1$ når $\xi \to \pm\infty$ gir da at $n = 2m$ med m heltallig.
Multiplikasjon med $\phi'(\xi)$, divisjon med $c^2 - 1$ og integrasjon mhp. ξ gir ligningen

$$\frac{1}{2}\,(\phi'(\xi))^2 + \frac{\cos\phi(\xi)}{1 - c^2} = E \; ,$$

der E er en integrasjonskonstant. Betingelsene at $\phi'(\xi) \to 0$ og $\cos\phi(\xi) \to 1$ når $\xi \to \pm\infty$ gir at

$$E = \frac{1}{1 - c^2} \; .$$

Det gir ligningen

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{2(1 - \cos\phi(\xi))}{1 - c^2} = \frac{4\sin^2\frac{\phi}{2}}{1 - c^2} \; .$$

Eller ekvivalent,

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \pm\gamma\,\mathrm{d}\xi \; ,$$

der $\gamma = 1/\sqrt{1 - c^2}$. Vi forutsetter at $|c| < 1$. Integrasjon av denne ligningen, med den oppgitte formelen, gir at

$$\left|\tan\frac{\phi}{4}\right| = \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi - \xi_0)} \; ,$$

med en integrasjonskonstant ξ_0. Da blir enten

$$\phi(\xi) = 4m\pi + 4\arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi - \xi_0)}$$

eller

$$\phi(\xi) = 4m\pi - 4\arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi - \xi_0)} \; ,$$

med m heltallig. Her kan vi bruke relasjonen

$$\arctan\frac{1}{w} = \frac{\pi}{2} - \arctan w$$

til å omskrive

$$\phi(\xi) = 4m\pi - 4\arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi - \xi_0)} = 4m\pi - 2\pi + 4\arctan \mathrm{e}^{\mp\gamma(\xi - \xi_0)} \; .$$

Tilsammen gir det den generelle løsningen

$$\phi(\xi) = 2m\pi + 4 \arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi-\xi_0)} \ ,$$

med m heltallig.
Hvis vi tolker ξ som en tidsvariabel, så er ϕ koordinaten og E energien til et endimensjonalt mekanisk system med potensiell energi

$$V(\phi) = \frac{\cos\phi}{1-c^2} \ .$$

Systemet ligger enten i ro på en potensialtopp, eller det beveger seg fra en potesialtopp, ved $\xi \to -\infty$, til en av de to nærmeste potesialtoppene, ved $\xi \to +\infty$.

3b) Permanentbølgeløsningene av formen

$$u(x,t) = \phi(\xi) \ , \qquad v(x,t) = \chi(\xi) \ ,$$

i tilfellet $\epsilon = 0$ er av 9 typer:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= 2m\pi \quad \text{eller} \quad 2m\pi + 4 \arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi-\xi_a)} \ , \\ \phi(\xi) &= 2n\pi \quad \text{eller} \quad 2n\pi + 4 \arctan \mathrm{e}^{\pm\gamma(\xi-\xi_b)} \ , \end{aligned}$$

der m og n er vilkårlige hele tall, mens ξ_a og ξ_b er to uavhengige integrasjonskonstanter.
Den enkleste typen er altså der både u og v er konstante.
Den nest enkleste typen er der enten u eller v er konstant, mens den andre øker eller avtar med 2π når ξ øker fra $-\infty$ til ∞.

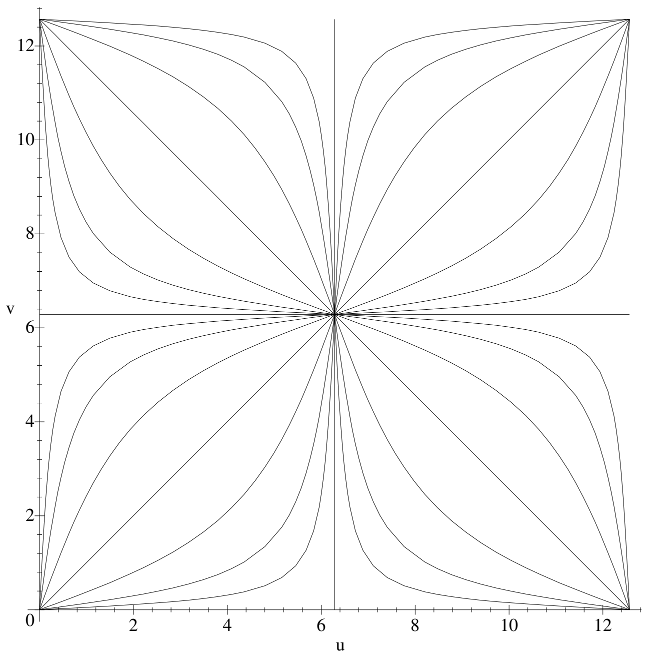

Figure 3: Permanentbølgeløsninger i tilfellet $\epsilon = 0$.

Den tredje muligheten er at u og v hver for seg øker eller avtar med 2π når ξ øker fra $-\infty$ til ∞. Avhengig av de to integrasjonskonstantene ξ_a og ξ_b får vi da forskjellige kurver i (u, v)-planet når ξ øker fra $-\infty$ til ∞.

Figur 3 viser eksempler på hvordan u og v varierer sammen for slike permanentbølgeløsninger, der $\phi(\xi) \to 2\pi$ og $\chi(\xi) \to 2\pi$ for $\xi \to -\infty$.

3c) Hvis vi antar at $u = v$, så får vi to ganger ligningen

$$u_{tt} - u_{xx} + (1 + \epsilon) \sin((1 + \epsilon)u) = 0 \; .$$

Hvis vi antar at $u = -v$, så får vi to ganger ligningen

$$u_{tt} - u_{xx} + (1 - \epsilon) \sin((1 - \epsilon)u) = 0 \; .$$

Begge disse ligningene er ikke noe annet enn skalerte versjoner av sine-Gordon-ligningen. I den første ligningen kan vi innføre nye variable $U = (1 + \epsilon)u$, $T = (1 + \epsilon)t$ og $X = (1 + \epsilon)x$, så får den formen

$$U_{TT} - U_{XX} + \sin U = 0 \; .$$

I den andre av de to ligningene må vi innføre i stedet variablene $U = (1-\epsilon)u$, $T = (1-\epsilon)t$ og $X = (1 - \epsilon)x$.
Konklusjon: vi kan begrense oss til løsninger av det koblede ligningssystemet som har $u = v$, eller vi kan begrense oss til løsninger som har $u = -v$. I begge tilfellene har vi løsninger som er skalerte versjoner av standard sine-Gordon-solitoner, og vi vet at de oppfører seg som solitoner når de kolliderer med andre løsninger av samme type. Det som vi ikke vet ut fra denne enkle analysen, er om disse løsningene er ekte solitoner, i den forstand at de overlever kollisjoner med vilkårlige (lokaliserte) løsninger av det koblede ligningssystemet.

3d) Ansatsen

$$u(x, t) = \phi(\xi) \; , \qquad v(x, t) = \chi(\xi) \; ,$$

innsatt i de koplede sine–Gordon-ligningene gir ligningene

$$\begin{aligned} (c^2 - 1)\phi'' + \sin(\phi + \epsilon\chi) + \epsilon \sin(\chi + \epsilon\phi) &= 0 \; , \\ (c^2 - 1)\chi'' + \sin(\chi + \epsilon\phi) + \epsilon \sin(\phi + \epsilon\chi) &= 0 \; . \end{aligned}$$

Her multipliserer vi den første ligningen med ϕ', den andre med χ', legger sammen og integrerer, det gir ligningen

$$\frac{c^2 - 1}{2} \Big((\phi'(\xi))^2 + (\chi'(\xi))^2 \Big) - \cos(\phi(\xi) + \epsilon\chi(\xi)) - \cos(\chi(\xi) + \epsilon\phi(\xi)) = (c^2 - 1)E \; ,$$

der E er en integrasjonskonstant. Randkravene når $\xi \to \pm\infty$, at $\phi'(\xi) \to 0$, $\chi'(\xi) \to 0$ og

$$\cos(\phi(\xi) + \epsilon\chi(\xi)) \to 1 \; , \qquad \cos(\chi(\xi) + \epsilon\phi(\xi)) \to 1 \; .$$

gir at

$$E = \frac{2}{1 - c^2} \; .$$

Ligningen ovenfor kan da skrives analogt med en energiligning i klassisk mekanikk,

$$\frac{1}{2}\left((\phi'(\xi))^2 + (\chi'(\xi))^2\right) + V(\phi(\xi), \chi(\xi)) = 0 \ ,$$

der V er en potensiell energi,

$$V(\phi, \chi) = \frac{\cos(\phi + \epsilon\chi) + \cos(\chi + \epsilon\phi) - 2}{1 - c^2} \ .$$

3e) Vi må ha at

$$\phi(\xi) + \epsilon\chi(\xi) \to 2m_\pm\pi \ , \qquad \chi(\xi) + \epsilon\phi(\xi) \to 2n_\pm\pi \ ,$$

eller ekvivalent,

$$\phi(\xi) \to \frac{2(m_\pm - \epsilon n_\pm)\pi}{1 - \epsilon^2} \ , \qquad \chi(\xi) \to \frac{2(n_\pm - \epsilon m_\pm)\pi}{1 - \epsilon^2} \ ,$$

når $\xi \to \pm\infty$, der m_+, m_-, n_+ og n_- er fire hele tall, som kjennetegner en gitt løsning. I tilfellet $\epsilon = 0$ har vi sett at vi må ha at $|m_+ - m_-| \leq 1$ og $|n_+ - n_-| \leq 1$, men når $\epsilon \neq 0$ finnes ikke lenger noen slik begrensning.
En permanentbølgeløsning beveger seg fra en topp i potensialet $V(\phi, \chi)$ ved $\xi \to -\infty$ til en annen topp ved $\xi \to \infty$.
I tilfellet $\epsilon = 0$ kan en bare komme fra en potensialtopp til en av de nærmeste åtte toppene, eller en kan selvsagt ligge i ro på en og samme topp.
I tilfellet $\epsilon \neq 0$ har en muligheten til å komme forbi de nærmeste toppene og bevege seg lenger ut i planet, faktisk hvor langt som helst. Figur 4 viser ett eksempel, med $\epsilon = 0.2$. Noen av potensialtoppene er merket med kryss i figuren.

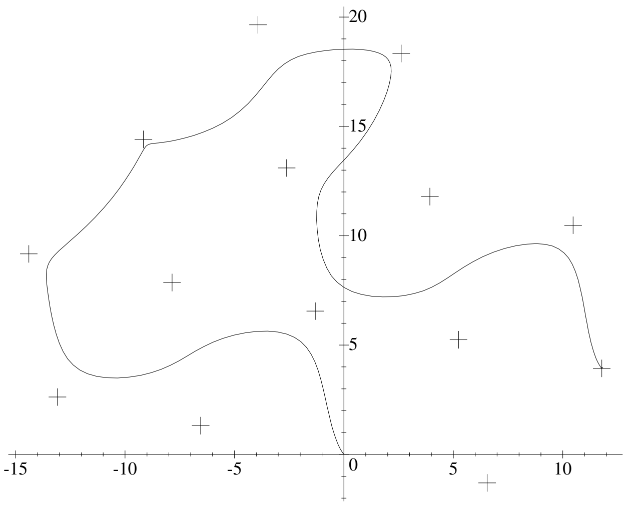

Figure 4: Eksempel på permanentbølgeløsning i tilfellet $\epsilon \neq 0$.