Eksamen i ikkelineær dynamikk, fag SIF 4088
Mandag 10. desember 2001
Løsninger

1a) Under de gitte forutsetningene er $\dot{S} = b(p)S_0 > 0$ for $S = 0$ og $\dot{S} = -a(p)S_0 < 0$ for $S = S_0$. Ulikhetene impliserer at det åpne intervallet $\langle 0, S_0 \rangle$ er et innfangingsområde.

1b) Med prisen p konstant har vi ligningen

$$\dot{S} = -aS + b(S_0 - S) \ ,$$

der a og b er konstante. Den er eksakt løsbar, og løsningen er

$$S(t) = s + (S(0) - s)\,\mathrm{e}^{-(a+b)t} \ ,$$

der s er den konstante verdien av S som gjør $\dot{S} = 0$, nemlig

$$s = \frac{bS_0}{a+b} \ .$$

Vi ser at uansett startverdien $S(0)$ vil $S(t) \to s$ når $t \to \infty$.
Samme konklusjon kan vi komme til uten å løse ligningen eksakt. Det gjør vi ved å konstatere først at $\dot{S} = 0$ for $S = s = bS_0/(a+b)$. Dernest fastslår vi at dette fikspunktet er det eneste som finnes, og at det er stabilt, begge deler fordi

$$\frac{\mathrm{d}\dot{S}}{\mathrm{d}S} = -(a+b) < 0 \ ,$$

for alle verdier av S. Spesielt har vi at $\dot{S} > 0$ for $S < s$ og $\dot{S} < 0$ for $S > s$, det impliserer stabilitet av fikspunktet $S = s$.
Nå tar vi hensyn til at den stabile grenseverdien for salget avhenger av prisen p, altså at

$$s = s(p) = \frac{b(p)S_0}{a(p) + b(p)} \ .$$

Når $t \to \infty$ går inntekten mot $I_\infty(p) = (p - p_0)s(p)$. Den maksimale inntekten er da gitt av ligningen

$$0 = \frac{\mathrm{d}I_\infty}{\mathrm{d}p} = s(p) + (p - p_0)s'(p) \ ,$$

der

$$s'(p) = \frac{\mathrm{d}s(p)}{\mathrm{d}p} = \frac{b'(p)S_0}{a(p)+b(p)} - \frac{b(p)(a'(p)+b'(p))S_0}{(a(p)+b(p))^2} = \frac{(a(p)b'(p) - b(p)a'(p))S_0}{(a(p)+b(p))^2} \ .$$

Det gir ligningen

$$b(p)(a(p)+b(p)) + (p - p_0)(a(p)b'(p) - b(p)a'(p)) = 0 \ ,$$

eller, etter divisjon med $a(p)b(p)$ og ordning av ligningen,

$$(p - p_0)\left(\frac{a'(p)}{a(p)} - \frac{b'(p)}{b(p)}\right) = 1 + \frac{b(p)}{a(p)} \ .$$

1c) Definer

$$f(p) = -\eta \left(p - p_0 - \frac{1}{\mu+\nu} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \, \mathrm{e}^{-(\mu+\nu)p} \right) \right) .$$

Da er, for enhver verdi av p,

$$f'(p) = -\eta \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \, \mathrm{e}^{-(\mu+\nu)p} \right) < -\eta < 0 \; .$$

Av det følger at ligningen $f(p) = 0$ har en og bare en løsning $p = p_*$, som da er det eneste fikspunktet for bevegelsesligningen $\dot{p} = f(p)$. Det følger også at fikspunktet er stabilt, slik at når vi integrerer ligningen ut fra en vilkårlig startverdi for p, så vil $p(t)$ konvergere mot fikspunktet p_*. Konvergensen er raskere enn den eksponensielle tidsavhengigheten $\mathrm{e}^{-\eta t}$.

1d) Anta at det finnes et fikspunkt der $\dot{S} = 0$ og $\dot{p} = 0$. Stabiliteten til fikspunktet er da (kanskje) gitt av egenverdiene λ_1 og λ_2 til Jacobi-matrisen i fikspunktet,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a(p)+b(p)) & -a'(p)S + b'(p)(S_0 - S) \\ \frac{\eta\gamma S_1}{(S_0-S)^2} & -\eta \end{pmatrix} .$$

Summen av egenverdiene til en matrise er lik trasen til matrisen,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\, A = -(a(p) + b(p) + \eta) < 0 \; ,$$

og produktet av egenverdiene er lik determinanten,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A = (a(p) + b(p))\eta + \frac{\eta\gamma S_1 (a'(p)S - b'(p)(S_0 - S))}{(S_0 - S)^2} \; .$$

Siden $a'(p) \geq 0$, $b'(p) \leq 0$ og $0 < S < S_0$, i følge forutsetningene, har vi at $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Det er nå to muligheter. Enten er begge egenverdiene reelle, og i så fall må begge være negative for vi skal få $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ og $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Eller så er den ene egenverdien den komplekskonjugerte av den andre, og i så fall må begge ha en negativ realdel. I begge tilfellene har begge egenverdiene negativ realdel, og det viser at fikspunktet, hvis det finnes, er stabilt.
Finnes det et fikspunkt? Vel, ligningen $\dot{S} = 0$ har en entydig løsning

$$S = \frac{b(p)S_0}{a(p) + b(p)} = s(p) \; .$$

Setter vi inn det i ligningen $\dot{p} = 0$, får vi ligningen

$$p = p_0 + \frac{\gamma S_1}{S_1 - s(p)} \; .$$

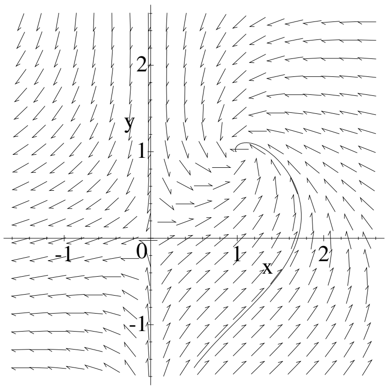
Dersom vi velger $S_1 = S_0$ og $\gamma = 1/(\mu + \nu)$, er dette den ligningen som bestemmer den prisen som maksimaliserer inntekten, forutsatt at $a(p) = \alpha\, \mathrm{e}^{\mu p}$ og $b(p) = \beta\, \mathrm{e}^{-\nu p}$.

2a) i) $\dot{x} = x(2 - x - y)$, $\dot{y} = x - y$.
Hvis vi setter inn $x = 0$, $y = 0$, gir det at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. Altså er origo et fikspunkt. Stabiliteten er gitt av egenverdiene til Jacobi-matrisen i origo,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Denne matrisen er triangulær, dvs. at den har bare nuller på den ene siden av diagonalen, og da er det egenverdiene som står på diagonalen. Egenverdiene er 2 og -1, den ene positiv og den andre negativ, og det viser at origo er et sadelpunkt.

Figur 1 viser et faseportrett, med eksempel på en bane, og med retninger av hastighetsfeltet indikert. Figuren avslører et stabilt fikspunkt i $x = y = 1$.



Figur 1: Faseportrett med eksempel på en bane.

ii) $\dot{x} = x - y,\ \ \dot{y} = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$.

$x = 0$, $y = 0$ gir at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. Igjen er origo et fikspunkt. Stabiliteten er gitt av egenverdiene til Jacobi-matrisen i origo,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2\mathrm{e}^{-2x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

En egenverdi λ er rot i den karakteristiske ligningen, der I er enhetsmatrisen,

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 .$$

Løsningene er

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}\right) .$$

To komplekse egenverdier med positiv realdel er kjennetegnet på et ustabilt fikspunkt, nærmere bestemt en ustabil spiral (et ustabilt fokus).

Figur 2 viser et faseportrett.

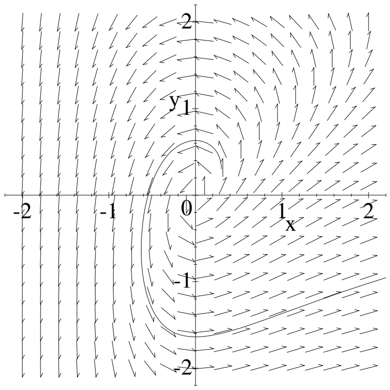
iii) $\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = x(1 + y) - 1$.

$x = 0$, $y = 0$ gir at $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -1$. Da er origo ikke et fikspunkt.

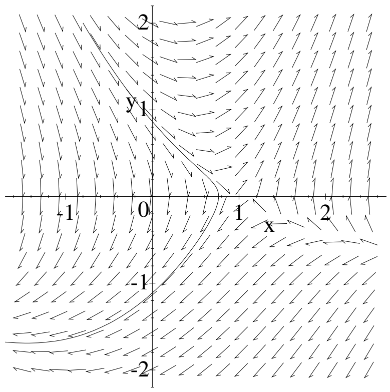
Figur 3 viser et faseportrett, og vi ser av figuren at $x = 1$, $y = 0$ er et sadelpunkt.

2b) Gitt bevegelsesligningene $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, der f og g er vilkårlige funksjoner (helst ikke mer vilkårlige enn at de er kontinuerlig deriverbare, dvs. har kontinuerlige deriverte).

At indeksen til en lukket kurve er $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, betyr pr. definisjon at når vi går rundt kurven en gang i positiv omløpsretning (mot urviseren), så roterer vektorfeltet $(f(x, y), g(x, y))$ en vinkel $2n\pi$. En negativ indeks betyr rotasjon i negativ



Figur 2: Faseportrett med eksempel på en bane.



Figur 3: Faseportrett med eksempel på en bane.

omløpsretning. Det forutsettes at ikke noe punkt på kurven er et fikspunkt, for i så fall ville indeksen ikke være veldefinert.
Indeksen til et fikspunkt er indeksen til en *liten* lukket kurve som går rundt fikspunktet. At kurven er "liten" betyr spesielt at den ikke går rundt mer enn ett fikspunkt.
Indeksen til origo er -1 i eksempel i) i oppgave 2a), $+1$ i eksempel ii) og 0 i eksempel iii). Det kan vi f.eks. se av de tre figurene ovenfor. De tre eksemplene illustrerer den generelle regelen at indeksen er -1 for sadelpunkt, $+1$ for alle andre typer fikspunkt, og 0 for alle punkt som ikke er fikspunkt.

2c) Indeksen til enhetssirkelen er -2, og det betyr at innenfor enhetssirkelen ligger det minst to sadelpunkt. Mer presist: hvis m er antallet sadelpunkt innenfor sirkelen, så må $m \geq 2$, og antallet av andre typer fikspunkt innenfor sirkelen er $m - 2$.

3a) Bevis for at $x + y$ er en bevegelseskonstant: den tidsderiverte er

$$\dot{x} + \dot{y} = -(1 - uv)u + (1 - uv)u = 0 \ .$$

Bevis for at $xy - uv$ er en bevegelseskonstant:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xu - uv) &= \dot{x}y + x\dot{y} - \dot{u}v - u\dot{v} \\ &= -(1 - uv)uy + x(1 - uv)u + uv - u(v + (1 - uv)(x - y)) = 0 \ . \end{aligned}$$

3b) Med

$$L = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} , \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} ,$$

har vi at

$$AL = \begin{pmatrix} ax+bv & au+by \\ cx-av & cu-ay \end{pmatrix} , \qquad LA = \begin{pmatrix} ax+cu & bx-au \\ av+cy & bv-ay \end{pmatrix} .$$

Ligningen $\dot{L} = [A, L] = AL - LA$ blir derfor som følger,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{u} \\ \dot{v} & \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bv-cu & 2au-b(x-y) \\ c(x-y)-2av & cu-bv \end{pmatrix} .$$

De oppgitte ligningene for $\dot{x}$, $\dot{u}$, $\dot{v}$ og $\dot{y}$ får vi dersom

$$bv - cu = -(1-uv)u \ , \quad 2au - b(x-y) = -u \ , \quad c(x-y) - 2av = v + (1-uv)(x-y) \ .$$

Disse tre ligningene for a, b og c er ikke uavhengige, og derfor er ikke løsningen entydig. En mulig løsning (den enkleste?) er

$$a = -\frac{1}{2} \ , \qquad b = 0 \ , \qquad c = 1 - uv \ .$$

3c) Vi antar altså at følgende bevegelsesligninger gjelder:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bv - cu \ , \\ \dot{y} &= cu - bv \ , \\ \dot{u} &= 2au - b(x-y) \ , \\ \dot{v} &= c(x-y) - 2av \ . \end{aligned}$$

Av dem følger at $\operatorname{Tr} L = x + y$ og $\det L = xy - uv$ er bevegelseskonstanter, det følger nemlig direkte at $\dot{x} + \dot{y} = 0$ og $\dot{x}y + x\dot{y} - \dot{u}v - u\dot{v} = 0$.
Siden egenverdiene til matrisen L er

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Tr} L \pm \sqrt{(\operatorname{Tr} L)^2 - 4 \det L} \right) ,$$

så er de også bevegelseskonstanter.
Et alternativt bevis for at egenverdiene er bevegelseskonstanter, kan vi lage ved å kopiere beviset for at egenverdiene til Schrödingeroperatoren

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)$$

er uavhengige av t når $u(x,t)$ er en løsning av Korteweg–de Vries-ligningen.
Da stiller vi opp egenverdiligningen for matrisen L, som har formen

$$L\psi = \lambda\psi \ ,$$

der λ er en egenverdi og ψ er en egenvektor,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} .$$

Så antar vi at ψ er tidsavhengig og oppfyller bevegelsesligningen

$$\dot{\psi} = A\psi \ .$$

Ved å derivere egenverdiligningen $L\psi = \lambda\psi$ får vi at

$$\dot{L}\psi + L\dot{\psi} = \dot{\lambda}\psi + \lambda\dot{\psi} \ ,$$

dvs., når vi bruker at $\dot{L} = [A, L]$ og $\dot{\psi} = A\psi$,

$$[A, L]\psi + LA\psi = \dot{\lambda}\psi + \lambda A\psi \ .$$

Her er

$$\lambda A\psi = A(\lambda\psi) = AL\psi \ .$$

Alt i alt gir det at

$$\dot{\lambda}\psi = 0 \ ,$$

og siden vi ikke kaller ψ en egenvektor uten at $\psi \neq 0$, så følger det at $\dot{\lambda} = 0$, som vi skulle vise.
Den tredje metoden for å vise at trasen, determinanten og egenverdiene til L er bevegelseskonstanter, er å se på størrelsene $\tau_k = \operatorname{Tr} L^k$, som foreslått i oppgaveteksten.
Ta f.eks. $k = 3$, da har vi at

$$\begin{aligned}
\dot{\tau}_3 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{Tr} L^3 = \operatorname{Tr}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LLL)\right) = \operatorname{Tr}(\dot{L}LL + L\dot{L}L + LL\dot{L}) \\
&= 3\operatorname{Tr}(L^2\dot{L}) = 3\operatorname{Tr}(L^2(AL - LA)) = 3(\operatorname{Tr}(L^2AL) - \operatorname{Tr}(L^3A)) \\
&= 3(\operatorname{Tr}(L^3A) - \operatorname{Tr}(L^3A)) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Det knepet som vi bruker her gjentatte ganger, er den generelle formelen $\operatorname{Tr}(BC) = \operatorname{Tr}(CB)$, som gir f.eks. at

$$\operatorname{Tr}(BCD) = \operatorname{Tr}(B(CD)) = \operatorname{Tr}((CD)B) = \operatorname{Tr}(CDB) \ .$$

Vi sier gjerne at trasen av et matriseprodukt er invariant under sykliske ombyttinger av faktorene i produktet.
På tilsvarende måte er $\dot{\tau}_k = 0$ for alle $k = 1, 2, 3, \ldots$.