Eksamen i Ikkelineær dynamikk, fag TFY 4305
Fredag 3. desember 2004
Løsninger

1) Vi antar at $u(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax-bt)}\,\varphi(x-ct)$, og definerer $f(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ax-bt)}$. Da er

$$\begin{aligned} u_t &= f_t\,\varphi + f\varphi_t = -\mathrm{i}bf\varphi - cf\varphi'\ , \\ u_{xx} &= f_{xx}\,\varphi + 2f_x\,\varphi_x + f\varphi_{xx} = -a^2 f\varphi + 2\mathrm{i}af\varphi' + f\varphi''\ . \end{aligned}$$

Siden φ forutsettes reell, er $|u|^2 = \varphi^2$. Vi setter inn i den kubiske Schrödingerligningen og forkorter bort f, det gir ligningen

$$b\varphi - \mathrm{i}c\varphi' - a^2\varphi + 2\mathrm{i}a\varphi' + \varphi'' + \varphi^3 = 0\ .$$

Siden både a, b, c og φ forutsettes å være reelle (denne forutsetningen var dessverre ikke eksplisitt nevnt i oppgaveteksten), og siden ligningen har både en realdel og en imaginærdel, får vi to reelle ligninger som må oppfylles. Imaginærdelen av ligningen gir at $c = 2a$, mens realdelen gir at

$$\varphi'' + (b - a^2)\varphi + \varphi^3 = 0\ .$$

Når vi multipliserer med φ' og integrerer, med en integrasjonskonstant E, får vi ligningen

$$\frac{1}{2}\,(\varphi')^2 + \frac{b-a^2}{2}\,\varphi^2 + \frac{1}{4}\,\varphi^4 = E\ .$$

Analogien med en partikkel som har φ som koordinat, $\xi = x - ct = x - 2at$ som tidsvariabel og

$$V(\varphi) = \frac{b-a^2}{2}\,\varphi^2 + \frac{1}{4}\,\varphi^4 = E$$

som potensial, viser at når $b - a^2 < 0$, så gir $E = 0$ en løsning $\varphi(\xi)$ slik at $\varphi(\xi) \to 0$ for $\xi \to \pm\infty$. Da har nemlig $V(\varphi)$ et lokalt maksimum i $\varphi = 0$. Og $V(0) = 0$, slik at med $E = 0$ er partikkelen akkurat så vidt i stand til å nå $\varphi = 0$ når $\xi \to \pm\infty$.

2a) Vi innfører impulsen $p = \dot{x}$, slik at vi får skrevet ligningene på standard førsteordens form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p\ , \\ \dot{p} &= -bp - kx - x^3\ . \end{aligned}$$

Fikspunkt har vi når $\dot{x} = 0$ og $\dot{p} = 0$. Ligningen $\dot{x} = 0$ betyr at $p = 0$. Ligningen $\dot{p} = 0$ gir dermed ligningen

$$bp + kx + x^3 = x(k + x^2) = 0\ .$$

Vi ser at $p = 0$, $x = 0$ alltid er et fikspunkt. Dersom $k < 0$ har vi dessuten de to fikspunktene $p = 0$, $x = \pm\sqrt{-k}\,$.

For å undersøke stabiliteten til et fikspunkt må vi finne egenverdiene til Jacobi-matrisen

$$A = \frac{\partial(\dot{x}\,,\,\dot{p})}{\partial(x\,,\,p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k-3x^2 & -b \end{pmatrix}$$

i fikspunktet. Egenverdiene er røtter i egenverdiligningen

$$\lambda^2 + b\lambda + k + 3x^2 = 0 \ ,$$

de er altså

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(k+3x^2)}}{2} \ .$$

I det ene fikspunktet er $x = 0$ og

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2} \ .$$

Hvis $b > 0$ og $k > 0$, så har begge egenverdiene negativ realdel, og da er dette fikspunktet stabilt. Det er et stabilt knutepunkt (med to negative reelle egenverdier) hvis $b > 2\sqrt{k}$, og en stabil spiral (det samme som et stabilt fokus, med to komplekse egenverdier) hvis $0 < b < 2\sqrt{k}$.
Hvis enten $b < 0$ eller $k < 0$, så har i hvert fall den ene egenverdien positiv realdel, og da er dette fikspunktet ustabilt. Det er et sadelpunkt (med to reelle egenverdier, en negativ og en positiv) hvis $k < 0$, et ustabilt knutepunkt (med to positive reelle egenverdier) hvis $b^2 > 4k > 0$, og en ustabil spiral (et ustabilt fokus, med to komplekse egenverdier) hvis $b^2 < 4k$.
Et marginalt tilfelle er $b = 0$, $k > 0$, da er begge egenverdiene rent imaginære (de har realdel lik null), og da er den lineære stabilitetsanalysen utilstrekkelig. Da er systemet konservativt, i følge oppgave 2b), og fikspunktet er et senter.
Et annet marginalt tilfelle er $b > 0$, $k = 0$, da er fikspunktet stabilt, i følge energiargumentet i oppgave 2c).

For $k < 0$ finnes det altså to andre fikspunkt $x = \pm\sqrt{-k}$, og i begge de to fikspunktene er

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8k}}{2} \ .$$

Hvis $b > 0$, så har begge disse egenverdiene negativ realdel, slik at begge fikspunktene er stabile. De er stabile knutepunkt (med to negative reelle egenverdier) hvis $-b^2 < 8k < 0$, og stabile spiraler (stabile fokus, med to komplekse egenverdier) hvis $8k < -b^2$.
Hvis $b < 0$, så har begge egenverdiene positiv realdel, og de to fikspunktene er ustabile. Enten ustabile knutepunkt (med to positive reelle egenverdier) hvis $-b^2 < 8k < 0$, eller ustabile spiraler (ustabile fokus, med to komplekse egenverdier) hvis $8k < -b^2$.
I det marginale tilfellet $b = 0$ er igjen begge egenverdiene rent imaginære, og systemet er konservativt, slik at de to fikspunktene er sentre.

Vi kan holde b fast og variere k. Ved $k = 0$ skjer det da en høygaffelbifurkasjon (engelsk: pitchfork bifurcation) av fikspunktet $x = 0$, $p = 0$. Fikspunktet forandrer stabilitet ved at en av de to reelle egenverdiene til Jacobi-matrisen skifter fortegn. Hvis $b > 0$, er dette

fikspunktet stabilt for $k > 0$ og ustabilt for $k < 0$, ved $k = 0$ oppstår det to nye stabile fikspunkt symmetrisk om $x = 0$. Dette er en superkritisk høygaffelbifurkasjon.
Hvis $b < 0$, har vi i stedet ett ustabilt fikspunkt $x = 0$ for $k > 0$, og tre ustabile fikspunkt $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{-k}$ for $k < 0$.
Omvendt kan vi holde k fast og variere b. Ved $b = 0$, dersom $k > 0$, skjer det da en degenerert Hopf-bifurkasjon av fikspunktet $p = 0, x = 0$, der de to egenverdiene til Jacobi-matrisen blir rent imaginære. Det er en *degenerert* Hopf-bifurkasjon, fordi det ikke finnes noen grensesykler hverken for $b > 0$ eller $b < 0$, derimot er systemet konservativt for $b = 0$, slik at fikspunktet er et senter.
Ved $b = 0$, dersom $k < 0$, skjer det en degenerert Hopf-bifurkasjon av hvert av fikspunktene $p = 0, x = \pm\sqrt{-k}$.

2b) Den tidsderiverte av energien

$$E = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{k}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x^4$$

er

$$\dot{E} = (\ddot{x} + kx + x^3)\dot{x} = -b\dot{x}^2 = -bp^2 \ .$$

Dersom $b = 0$, er altså $\dot{E} = 0$, og E er bevart. .

2c) Dersom $b > 0$, er $\dot{E} = -b\dot{x}^2 = -bp^2 \leq 0$.
Da er altså E *nesten* en Lyapunov-funksjon. I følge definisjonen skulle E ha følgende egenskaper for å være en Lyapunov-funksjon:
– $E > 0$ overalt unntatt i ett eneste fikspunkt, der $E = 0$;
– $\dot{E} < 0$ overalt unntatt i det samme fikspunktet.
Den første betingelsen er oppfylt dersom $k \geq 0$. Den er bare nesten oppfylt dersom $k < 0$, da har vi at $E = 0$ i fikspunktet $p = 0, x = 0$, men minimumspunktene til E er de to fikspunktene $p = 0, x = \pm\sqrt{-k}$, og der er

$$E = -\frac{k^2}{4} < 0 \ .$$

At minimumsverdien ikke er lik 0, spiller selvfølgelig ingen rolle, det kan vi rette på ved å trekke fra E den konstante minimumsverdien. At funksjonen har to minimumspunkt i stedet for ett, er en mer vesentlig forskjell. Det betyr at det finnes mer enn ett stabilt fikspunkt som oscillatoren har mulighet til å ende opp i.
Den andre betingelsen er også nesten oppfylt dersom $b > 0$: vi har at $\dot{E} < 0$ unntatt for $p = 0$. Men hvis $p = 0$ ved ett tidspunkt, og oscillatoren ikke befinner seg i et fikspunkt, vil $\dot{p} \neq 0$, slik at vi har $\dot{E} < 0$ både før og etter dette ene tidspunktet.
Eksistensen av en slik «nesten-Lyapunov-funksjon» impliserer at for $b > 0$ og $k \geq 0$ er $p = 0, x = 0$ et globalt stabilt fikspunkt.
For $b > 0$ og $k < 0$ finnes det tre fikspunkt $p = 0, x = 0$ og $p = 0, x = \pm\sqrt{-k}$ som oscillatoren kan ende opp i.
Det ene fikspunktet $p = 0, x = 0$ er ustabilt, og for å treffe det, må vi velge initialverdier for x og p nøyaktig på den stabile mangfoldigheten til dette fikspunktet.
De to andre fikspunktene er stabile, og de er globalt stabile, i den forstand at oscillatoren vil treffe ett av dem til slutt, unntatt i det marginale tilfellet at den treffer det ustabile fikspunktet $p = 0, x = 0$.

3a) Ligningene

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - a x_n^2 \ , \\ y_{n+1} &= b x_n \ , \end{aligned}$$

er enkle å løse med hensyn på x_n og y_n. Først finner vi

$$x_n = \frac{y_{n+1}}{b} \ ,$$

og deretter

$$y_n = x_{n+1} - 1 + a x_n^2 = x_{n+1} - 1 + \frac{a y_{n+1}^2}{b^2} \ .$$

3b) Ved en todimensjonal avbildning multipliseres et infinitesimalt areal med (absoluttverdien av) determinanten til Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2a x_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} .$$

Vi ser at $\det A = -b =$ konstant, altså multipliseres ethvert infinitesimalt eller endelig areal med $|b|$ (i vårt tilfelle er $|b| = b$).
Altså er Hénon-avbildningen arealbevarende for $b = \pm 1$.

3c) Det er enklest å bruke rekursjonsformelen for x,

$$x_{n+1} = 1 + b x_{n-1} - a x_n^2 \ .$$

For et fikspunkt (x, y) gjelder at

$$x = 1 + bx - ax^2 \ .$$

Og de to løsningene er

$$x_\pm = \frac{b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \ .$$

De tilhørende y-verdiene er $y_+ = b x_+$ og $y_- = b x_-$.

3d) Stabiliteten til et fikspunkt (x, y) bestemmes av egenverdiene

$$\lambda = -ax \pm \sqrt{a^2 x^2 + b}$$

til Jacobi-matrisen A i fikspunktet. Betingelsen for stabilitet er at begge egenverdiene oppfyller ulikheten $|\lambda| < 1$. Det er selvfølgelig nok å se på den egenverdien som har størst absoluttverdi.

Hvis vi tar for oss først tilfellet

$$x = x_- = \frac{b - 1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} < 0 \ ,$$

så er det nødvendig og tilstrekkelig for stabilitet at

$$-ax + \sqrt{a^2x^2 + b} < 1 \ ,$$

det vil si at

$$\sqrt{a^2x^2 + b} < 1 + ax \ .$$

Det er da nødvendig at $|ax| < 1$. I så fall kan vi kvadrere den siste ulikheten, og få at

$$a^2x^2 + b < 1 + 2ax + a^2x^2 \ ,$$

som er det samme som at

$$b < 1 + 2ax = 1 + 2a\,\frac{b - 1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} = b - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \ .$$

Denne ulikheten er umulig å oppfylle, det viser at fikspunktet (x_-, y_-) er ustabilt.
Så gjelder det tilfellet

$$x = x_+ = \frac{b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} > 0 \ .$$

Her er det nødvendig og tilstrekkelig for stabilitet at

$$-ax - \sqrt{a^2x^2 + b} > -1 \ ,$$

det vil si at

$$\sqrt{a^2x^2 + b} < 1 - ax \ .$$

Det er da igjen nødvendig at $|ax| < 1$. I så fall kan vi kvadrere den siste ulikheten, og få at

$$b < 1 - 2ax = 1 - 2a\,\frac{b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} = 2 - b - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \ .$$

Vi skriver om denne ulikheten slik:

$$\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 2(1 - b) \ .$$

Den kan ikke oppfylles uten at $b < 1$. Under forutsetning av at $b < 1$ kan vi kvadrere ulikheten ovenfor, og få ulikheten

$$4a < 3(b-1)^2 \ .$$

Men hva med ulikheten $ax < 1$, som vi brukte underveis? Vi har at

$$\begin{aligned} ax \ = \ ax_+ &= \frac{b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2} < \frac{b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 3(b-1)^2}}{2} \\ &= \frac{b - 1 + 2|b-1|}{2} = \frac{b - 1 - 2(b-1)}{2} = \frac{1-b}{2} < \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Det viser at ulikheten $ax < 1$ automatisk er oppfylt når $4a < 3(b-1)^2$, og ikke gir noen ekstra betingelser.

Konklusjon: Fikspunktet (x_-, y_-) er alltid ustabilt. Fikspunktet (x_+, y_+) er stabilt for $b < 1$ og $4a < 3(b-1)^2$, og ustabilt ellers.

Bifurkasjonen som skjer ved $4a = 3(b-1)^2$ er en flipp-bifurkasjon, idet den kritiske egenverdien er $\lambda = -1$. Vi vil følgelig vente å finne at det oppstår en stabil to-syklus i bifurkasjonen.

3e) For å finne to-syklusen er det igjen enklest å bruke rekursjonsformelen

$$x_{n+1} = 1 + bx_{n-1} - ax_n^2 \,.$$

Her skal vi nå få fram en følge av formen $x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, \ldots$. Altså skal

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + bx_2 - ax_1^2 \,, \\ x_1 &= 1 + bx_1 - ax_2^2 \,. \end{aligned}$$

Vi trekker den ene ligningen fra den andre, og får at

$$(1-b)(x_1 - x_2) = a(x_1^2 - x_1^2) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \,.$$

For en to-syklus skal $x_1 \neq x_2$, slik at vi får som betingelse at

$$x_1 + x_2 = \frac{1-b}{a} \,.$$

Vi legger sammen ligningene, og får at

$$(1-b)(x_1 + x_2) = 2 - a(x_1^2 + x_1^2) = 2 - \frac{a}{2}\,\Big((x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2\Big) \,.$$

Vi setter inn for $x_1 + x_2$, og får at

$$\frac{a}{2}\,(x_1 - x_2)^2 = 2 - \frac{3(1-b)^2}{2a} \,.$$

Som vil si at

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{4a - 3(b-1)^2}}{a} \,.$$

Vi ser at to-syklusen eksisterer når $4a > 3(b-1)^2$. Den oppstår altså samtidig med at fikspunktet (x_+, y_+) blir ustabilt.
Punktene i to-syklusen er $(x_1, y_1) = (x_1, bx_2)$ og $(x_2, y_2) = (x_2, bx_1)$, og x-verdiene er

$$x_{1,2} = \frac{x_1 + x_2 \pm |x_1 - x_2|}{2} = \frac{1 - b \pm \sqrt{4a - 3(b-1)^2}}{2a} \,.$$

For de kritiske parameterverdiene $4a = 3(b-1)^2$ er

$$x_1 = x_2 = \frac{1-b}{2a} \,.$$

To-syklusen faller da sammen med fikspunktet (x_+, y_+), siden

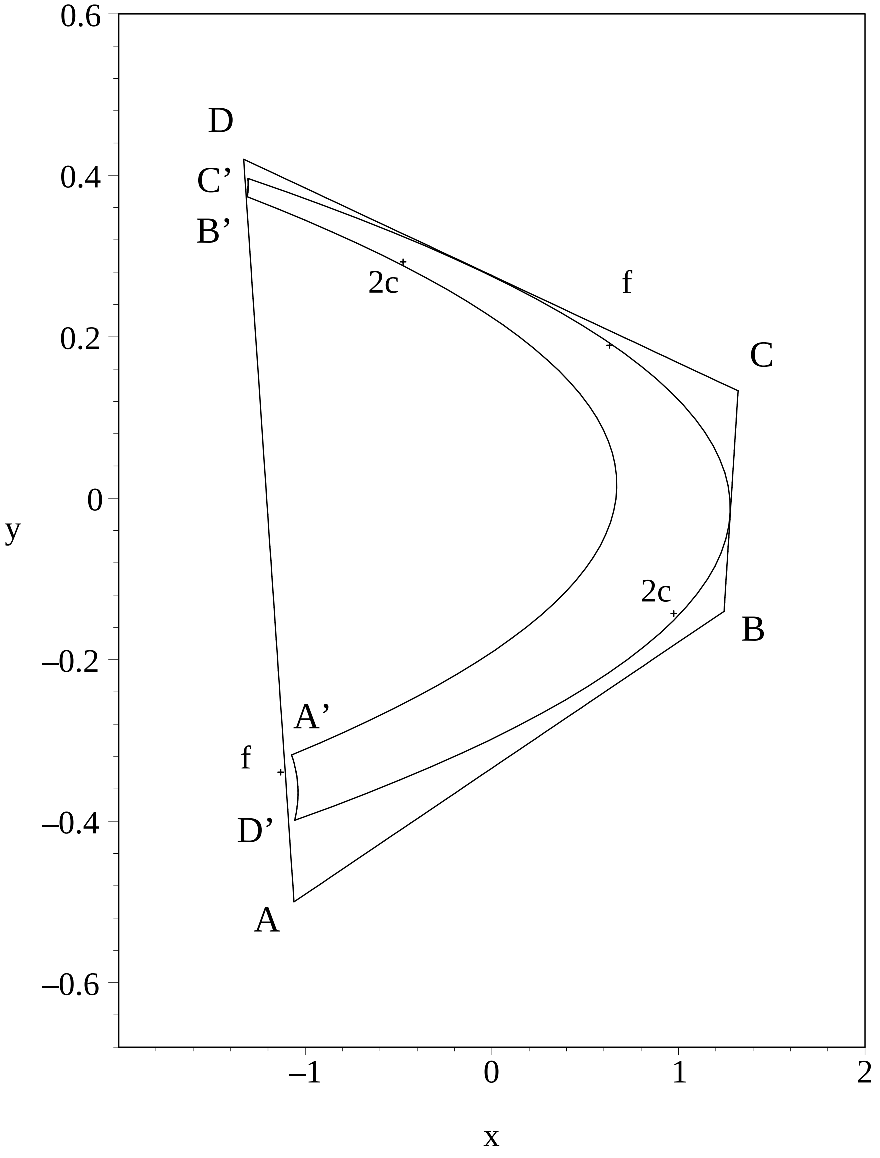
$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{b-1+\sqrt{(b-1)^2+4a}}{2a} = \frac{b-1+\sqrt{(b-1)^2+3(b-1)^2}}{2a} \\ &= \frac{b-1+2(1-b)}{2a} = \frac{1-b}{2a} \,. \end{aligned}$$

Det bekrefter at fikspunktet (x_+, y_+) blir ustabilt ved periodedobling.
Vi burde sjekke at to-syklusen er stabil med det samme den oppstår, men så langt går vi ikke her.

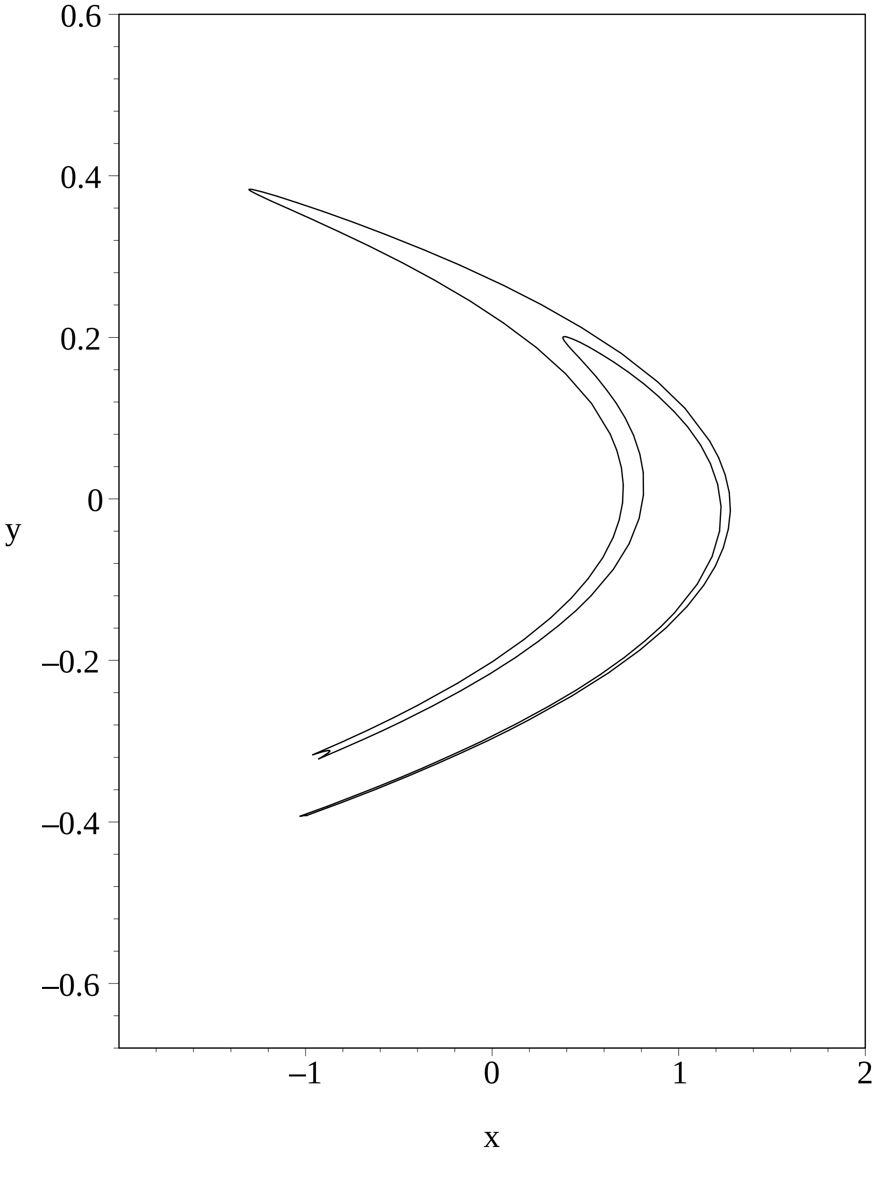
3f) Arealet multipliseres med $|b| = 0{,}3$, altså vil en figur med areal 1,48 avbildes på en figur med areal $0{,}3 \times 1{,}48 = 0{,}444$.
Figur 1 viser punktene A', B', C' og D' som punktene A, B, C og D avbildes over på.
Ved siden av at det selvfølgelig er mulig å regne seg fram til svaret, er det mulig å resonnere seg fram, uten regning. De rette linjene som utgjør sidene i firkanten ABCD, avbildes over på parabler. De fire hjørnene er knekkpunkter på omkretsen til firkanten, og blir derfor også knekkpunkter på omkretsen til den figuren A'B'C'D' som firkanten avbildes på. Punktene ABCD følger etter hverandre når vi går rundt firkanten i retning *mot* urviseren. At determinanten til Jacobi-matrisen er negativ, betyr at Hénon-avbildningen er en speiling, derfor må punktene A'B'C'D' følge etter hverandre i retning *med* urviseren. Hvis vi altså kan lokalisere det ene punktet, for eksempel A', vet vi dermed hvor de tre andre er. Nøkkelen her er at det ligger et fikspunkt nær det rette linjestykket AD, og et annet fikspunkt nær det rette linjestykket CD. Derfor må linjestykket AD avbildes over på en parabelbue A'D' som ligger nær det første fikspunktet, og linjestykket CD må avbildes over på en parabelbue C'D' som ligger nær det andre fikspunktet.
Den bisarre attraktoren i Hénon-avbildningen med disse parameterverdiene oppstår ved folding, samtidig med strekking i den ene retningen (og sammentrykking i den andre retningen for at volumet skal reduseres). Figur 1 viser firkanten ABCD og det første stadiet i deformeringen av den. Figur 2 viser det andre stadiet i deformeringen. Hver iterasjon av avbildningen dobler antallet «armer». Når den samme prosessen er gjentatt uendelig mange ganger, står vi igjen med en bisarr attraktor. I et vilkårlig punkt er den en glatt kurve i en bestemt retning, mens et snitt gjennom attraktoren i enhver annen retning er en Cantor-mengde.
Punktene i to-syklusen har x-koordinatene

$$x_{1,2} = \frac{1-b\pm\sqrt{4a-3(b-1)^2}}{2a} = \frac{0{,}7\pm\sqrt{4{,}13}}{2{,}8} = \begin{cases} 0{,}9758\,, \\ -0{,}4758\,. \end{cases}$$

og y-koordinatene $y_1 = bx_2 = -0{,}1427$ og $y_2 = bx_1 = 0{,}2927$.



Figur 1: Hjørnene A, B, C og D i firkanten ABCD avbildes over på hjørnene A’, B’, C’ og D’ i den figuren som er bildet av ABCD ved Hénon-avbildningen. Parameterverdier: $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$. To fikspunkt er markert med symbolet “+” og bokstaven “f”. Punktene i to-syklusen er markert med symbolet “+” og teksten “2c”.



Figur 2: Bildet av firkanten ABCD etter at den har vært igjennom Hénon-avbildningen to ganger. Parameterverdier: $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$.