Eksamen i Ikkelineær dynamikk, fag TFY 4305
Onsdag 30. november 2005
Løsninger

1) Den generelle løsningen av ligningen $u_t + cu_x = 0$ er $u(x,t) = f(x - ct)$, der f er en vilkårlig funksjon av en variabel. Hvordan beviser vi det? Her er en mulig måte.

   Innfør nye variable istedenfor x og t, for eksempel $\xi = x - ct$ og $\eta = x + ct$, da sier kjerneregelen at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -c\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,,\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,.
\end{aligned}$$

   Og vi får ligningen

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 2c\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,,$$

   som opplagt har den generelle løsningen $u(x,t) = f(\xi) = f(x - ct)$.

   Når $u(x,t) = f(\xi) = f(x - ct)$, så betyr det at potensialet $u(x,t)$ beveger seg i positiv x-retning etter som tiden går, med en konstant hastighet c, og uten å forandre form. Hvis vi lar bølgefunksjonen ψ også bevege seg med konstant hastighet c, uten å forandre form, altså lar $\psi = \psi(x - ct)$, så er det klart at hvis egenverdiligningen $L\psi = \lambda\psi$ er oppfylt ved ett tidspunkt, for eksempel ved $t = 0$, så er den oppfylt for alle t, med en egenverdi λ som ikke avhenger av t.

   Den andre måten å bevise det samme resultatet på, starter med å tidsderivere egenverdiligningen $L\psi = \lambda\psi$, det gir ligningen

$$u_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t\,.$$

   Så antar vi at λ er tidsuavhengig, slik at $\lambda_t = 0$, og at $\psi_t = A\psi$ for en eller annen lineær operator A, det gir at

$$(u_t + LA - \lambda A)\psi = 0\,.$$

   Her bruker vi at

$$\lambda A\psi = A(\lambda\psi) = AL\psi\,,$$

   slik at ligningen blir:

$$(u_t + LA - AL)\psi = 0\,.$$

   Denne ligningen er oppfylt dersom $u_t + cu_x = 0$, samtidig som kommutatoren $[L, A] = LA - AL$ er lik cu_x.

   For en vilkårlig bølgefunksjon ψ er

$$\left[u\,,\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\psi = \left(u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,u\right)\psi = u\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(u\psi) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\psi\,.$$

   Det viser at

$$\left[u\,,\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -u_x\,.$$

Videre er da

$$\left[L\,,\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]=\left[u\,,\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]=-u_x\ ,$$

og vi ser at vi kan oppnå at $[L,A]=cu_x$ ved å velge

$$A=-c\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ .$$

Ligningen $\psi_t=A\psi$ blir da den samme ligningen som den som gir tidsutviklingen av u, nemlig $\psi_t+c\psi_x=0$. Den generelle løsningen er altså $\psi=\psi(x-ct)$.

2a) Når $F(1)=1$ og $F'(1)=1$, så betyr det at den rette linjen $y=x$ i (x,y)-planet er tangent til kurven $y=F(x)$ i punktet $(x,y)=(1,1)$. Siden $F''(x)>0$ for alle $x>0$, må da kurven $y=F(x)$ ligge over linjen $y=x$ for alle $x\geq 0$, med unntak av $x=1$. Med andre ord, $x_1=1$ er det eneste fikspunktet for $F(x)$ med $x\geq 0$.

Fikspunktet $x_1=1$ er stabilt fra venstre og ustabilt fra høyre. Starter vi med $0\leq x<1$ og itererer $x\mapsto F(x)$, konvergerer iterasjonene mot $x=1$. Starter vi med $x>1$ og itererer, divergerer iterasjonene. Begge deler ser vi ved å tegne «spindelvev» (det som Strogatz kaller «cobweb»).

Betingelsen $F'(1)=1$ betyr, fysisk sett, at hvert nøytron har i gjennomsnitt nøyaktig ett nøytron som første generasjons etterkommer, altså at antallet nøytroner er konstant *i gjennomsnitt*.

2b) Siden $F''(x)>0$ for alle $x>0$, er det klart at F kan ha maksimalt to fikspunkt for $x\geq 0$.

Nå vet vi at $F(0)=p_0\geq 0$, og at $F(x)>x$ i grensen $x\to\infty$, det siste følger av antagelsen at $p_n>0$ for minst en $n>1$.

Siden $F(x)$ er en kontinuerlig funksjon av x, følger det at den må ha minst to fikspunkt for $x\geq 0$ dersom det finnes minst en $x>0$ slik at $F(x)<x$.

Hvis $F'(1)<1$, så er $F(x)<x$ for alle x som er bare litt større enn 1, og da finnes det et fikspunkt $x_2>1$.

Da må $F'(x_2)>1$, og det betyr at x_2 er ustabilt.

Hvis $F'(1)>1$, så er $F(x)<x$ for alle x som er bare litt mindre enn 1, og da finnes det et fikspunkt $x_2<1$, faktisk $0\leq x_2<1$, ettersom $F(0)\geq 0$.

Da må $F'(x_2)<1$, og det betyr at x_2 er stabilt.

2c) Av ligningen $F_{g+1}(x)=F_g(F(x))$ følger ved derivasjon, og bruk av kjerneregelen, at

$$F'_{g+1}(x)=F'_g(F(x))\,F'(x)\ ,$$

altså:

$$\langle n\rangle_{g+1}=\langle n\rangle_g\,\langle n\rangle_1\ .$$

Da følger, ved induksjon med hensyn på g, at $\langle n\rangle_g=(\langle n\rangle_1)^g$.

2d) Stoppsannsynligheten $p(0,\infty) = \lim_{g\to\infty} F^g(0)$ er det fikspunktet for funksjonen F som iterasjonene konvergerer mot når vi starter med $x = 0$ og itererer avbildningen $x \mapsto F(x)$.

Det er altså det minste fikspunktet til F, enten $x_1 = 1$ dersom $F'(1) \leq 1$, eller $x_2 < 1$ dersom $F'(1) > 1$.

Vi har altså at $p(0,\infty) < 1$ hvis og bare hvis $\langle n\rangle_1 = F'(1) > 1$.

Merk at den ekte ulikheten $F'(1) > 1$ er nødvendig. I det marginale tilfellet $F'(1) = 1$ vil kjedereaksjonen helt sikkert stoppe.

Eksempel: $F(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ med $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.
Fikspunktligningen $F(x) = x$ blir da:

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = x \ .$$

Siden $p_1 = 1 - p_0 - p_2$, får vi ligningen

$$0 = p_0(1-x) + p_2(x^2 - x) = (1-x)(p_0 - p_2 x) \ .$$

Røttene er $x = x_1 = 1$ og $x = x_2 = p_0/p_2$. Med de oppgitte tallverdiene er

$$p(0,\infty) = x_2 = \frac{p_0}{p_2} = \frac{0{,}18}{0{,}24} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \ .$$

Altså: sannsynligheten for at kjedereaksjonen stopper allerede med det første nøytronet er 18%, mens sannsynligheten for at den stopper før eller siden, etter et endelig antall generasjoner, er hele 75%.

Forventningsverdier av antall nøytroner:

$$\begin{aligned}
\langle n\rangle_1 &= p_1 + 2p_2 = 1{,}06 \approx \mathrm{e}^{0{,}06} \ , \\
\langle n\rangle_{10} &= (1{,}06)^{10} = 1{,}79 \approx \mathrm{e}^{0{,}6} \ , \\
\langle n\rangle_{100} &= (1{,}06)^{100} = 339 \approx \mathrm{e}^{6} \ , \\
\langle n\rangle_{1000} &= (1{,}06)^{1000} = 2{,}0 \times 10^{25} \approx \mathrm{e}^{60} \ .
\end{aligned}$$

3a) Anta at $(x(t), y(t), z(t))$ er en løsning av Lorenz-ligningene

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) \ , \\
\dot{y} &= (r - z)x - y \ , \\
\dot{z} &= xy - bz \ .
\end{aligned}$$

Ved transformasjonen $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ lager vi tre nye funksjoner av t:

$$X(t) = -x(t) \ , \qquad Y(t) = -y(t) \ , \qquad Z(t) = z(t) \ ,$$

og vi skal vise at $(X(t), Y(t), Z(t))$ er en annen løsning av de samme ligningene, det vil si at

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \sigma(Y - X) \ , \\
\dot{Y} &= (r - Z)X - Y \ , \\
\dot{Z} &= XY - bZ \ .
\end{aligned}$$

Det viser vi direkte ved innsetting:

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= -\dot{x} = \sigma(-y+x) = \sigma(Y-X)\ , \\
\dot{Y} &= -\dot{y} = (r-z)(-x)+y = (r-Z)X-Y\ , \\
\dot{Z} &= \dot{z} = xy-bz = XY-bZ\ .
\end{aligned}$$

Denne 180 graders rotasjonssymmetrien impliserer for eksempel at fikspunkt, grensesykler og attraktorer enten er symmetriske under en slik rotasjon, det vil si at de roteres over i seg selv, eller de opptrer parvis, slik at medlemmene av et par roteres over i hverandre.

For eksempel er origo et symmetrisk fikspunkt, og alle andre fikspunkt må opptre parvis.

Høygaffelbifurkasjoner er typiske for et system med en slik symmetri.

3b) Lorenz-systemet har ikke tidsreversjonssymmetri. Med andre ord: systemet er ikke reversibelt (i Strogatz sin terminologi).

Tidsreversjon betyr at vi bruker $T=-t$ som tidsvariabel istedenfor t. Samtidig kan vi gjøre en transformasjon R, som avbilder et punkt (x,y,z) over i $(X,Y,Z)=R(x,y,z)$. Systemet har tidsreversjonssymmetri dersom bevegelsesligningene er de samme etter transformasjonen, det vil si dersom

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} &= \sigma(Y-X)\ , \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} &= (r-Z)X-Y\ , \\
\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T} &= XY-bZ\ .
\end{aligned}$$

Å bevise at det er umulig å finne en slik refleksjon R, er ofte ikke så lett, det er som regel mye enklere å finne en R dersom den eksisterer.

Det er klart at R må transformere fikspunkt over i fikspunkt, grensesykler over i grensesykler, og så videre. Dessuten må R snu om stabiliteten, slik at f.eks. et stabilt fikspunkt transformeres over i et ustabilt fikspunkt. For visse parameterverdier i Lorenz-systemet finnes det bare ett fikspunkt, nemlig origo, og det er stabilt. Da kan systemet ikke være reversibelt.

I Lorenz-systemet har vi et annet ganske overbevisende argument, nemlig at alle volum reduseres eksponensielt med tiden t. For et lite volum ΔV gjelder at

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta V)}{\mathrm{d}t} = (\mathrm{Tr}\,A)(\Delta V) = -(\sigma+1+b)(\Delta V)\ ,$$

der A er Jacobi-matrisen,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial\dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial\dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Etter tidsreversjon så måtte alle volum øke eksponensielt, og det er simpelthen umulig å få til.

Eksponensiell tidsavhengighet av volum er også en god grunn til at Lorenz-ligningene ikke kan ha en kvasiperiodisk løsning. En slik løsning fyller nemlig opp en todimensjonal flate, som er overflaten av en torus, i den forstand at kurven passerer vilkårlig nær ethvert punkt på flaten. Det er bare mulig dersom bevegelsesligningene er slik at volumet av torusen bevares, ettersom løsningskurver ikke kan krysse hverandre, og følgelig heller ikke kan krysse overflaten av torusen.

3c) Origo er opplagt et fikspunkt: med $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ gir Lorenz-ligningene at $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 0, 0)$.

Jacobi-matrisen $A = \partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})/\partial(x, y, z)$ (se ovenfor) i origo er

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Stabiliteten av fikspunktet er gitt av egenverdiene til A. Siden A er blokkdiagonal, med en 2×2-matrise og en 1×1-matrise på diagonalen, ser vi umiddelbart at $-b$ er en negativ egenverdi til A, som svarer til at z-aksen er en stabil retning i origo. 2×2-matrisen

$$B = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$$

har trase $\tau = -(\sigma + 1) = \lambda_1 + \lambda_2$ og determinant $\Delta = \sigma(1 - r) = \lambda_1\lambda_2$, der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til B.

Når $r > 1$, så er $\Delta < 0$, slik at λ_1 og λ_2 må være reelle og ha motsatt fortegn. Da er origo et tredimensjonalt sadelpunkt: Jacobi-matrisen A har en positiv og to negative egenverdier.

Når $r < 1$, så er $\Delta > 0$, slik at λ_1 og λ_2 enten er reelle og har samme fortegn, eller er komplekskonjugerte av hverandre. Siden $\lambda_1 + \lambda_2 = \tau < 0$, konkluderer vi med at λ_1 og λ_2 begge har negativ realdel. Origo er da et stabilt fikspunkt: Jacobi-matrisen A har tre egenverdier som enten er negative, eller komplekse med negativ realdel.

Andre fikspunkt? Ligningen $\dot{x} = 0$ er ekvivalent med at $y = x$. Ligningen

$$0 = \dot{y} = (r - z)x - y = (r - z - 1)x$$

gir deretter to muligheter. Enten er $x = y = 0$, og da gir ligningen $\dot{z} = 0$ at $z = 0$, det gir oss bare om igjen origo som fikspunkt. Eller så er $x = y \neq 0$, og da må $z = r - 1$. Til slutt gir ligningen

$$0 = \dot{z} = xy - bz = x^2 - bz$$

at $z = r - 1 \geq 0$, altså $r \geq 1$, og $x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}$.

Alt i alt fins det to fikspunkt, i tillegg til origo, dersom $r > 1$, det er
$C_+ = (x, y, z) = (\sqrt{b(r - 1)}\,, \sqrt{b(r - 1)}\,, r - 1)$ og
$C_- = (x, y, z) = (-\sqrt{b(r - 1)}\,, -\sqrt{b(r - 1)}\,, r - 1)$.

Samtidig som fikspunktet i origo blir ustabilt, når $r = 1$, spalter det av de to fikspunktene C_+ og C_-. Det er ikke vanskelig å gjette (men litt vanskeligere å bevise) at de to nye fikspunktene er stabile til å begynne med, for r litt større enn 1.

Dette er altså en superkritisk høygaffelbifurkasjon.

3d) Vi har grensesykler for $r = 240$, 220 og 216, og en kaotisk attraktor for $r = 214$.

Dette er en periodedoblingsekvens. Figurene viser periode 1, periode 2 og periode 4, og den kaotiske attraktoren som oppstår etter at alle periodedoblingene er unnagjort, men før de kaotiske båndene slår seg sammen til ett kaotisk bånd.