Løsning, øving 4 for TFY4270 Klassisk feltteori, til 12/2 2004

Oppgave 1

Det viktigste referansesystemet i denne oppgaven er det systemet der partikkelen ligger i ro opprinnelig. Vi ser på hva som skjer fra et tidspunkt t, som målt i dette referansesystemet, og til et litt senere tidspunkt $t+\Delta t$. I dette lille tidsintervallet øker egentiden for partikkelen fra τ til $\tau+\Delta\tau$, og sammenhengen mellom Δt og $\Delta\tau$ er at

$$\Delta\tau = \Delta t\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,,$$

der v er hastigheten ved tidspunktet t og c er lyshastigheten.
Det nest viktigste referansesystemet er det inertialsystemet der partikkelen tilfeldigvis ligger i ro ved tidspunktet t. I dette systemet øker hastigheten fra null til $a\,\Delta\tau$ i egentidsintervallet fra τ til $\tau+\Delta\tau$, der a er den konstante akselerasjonen som partikkelen opplever at den er utsatt for. Hastigheten i det opprinnelige hvilesystemet øker da, i følge formelen for addisjon av hastigheter, fra v til

$$v+\Delta v = \frac{v+a\,\Delta\tau}{1+\frac{v\,a\,\Delta\tau}{c^2}} = (v+a\,\Delta\tau)\left(1-\frac{v\,a\,\Delta\tau}{c^2}+\cdots\right) = v+a\,\Delta\tau-\frac{v^2\,a\,\Delta\tau}{c^2}+\cdots\,.$$

Dette gir følgende differensialligning:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Som kan omformes slik:

$$a\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}v}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{c+v}+\frac{1}{c-v}\right)\mathrm{d}v\,.$$

Hvis vi velger nullpunktet for egentiden slik at $v=0$ ved $\tau=0$, og integrerer ligningen, får vi at

$$a\tau = \frac{c}{2}\,\ln\!\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\,.$$

Eller omskrevet:

$$v = c\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{2a\tau}{c}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2a\tau}{c}}+1} = c\,\tanh\!\left(\frac{a\tau}{c}\right)\,.$$

Videre har vi at

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \cosh\!\left(\frac{a\tau}{c}\right)\,,$$

som integreres til

$$t = \frac{c}{a}\,\sinh\!\left(\frac{a\tau}{c}\right)\,,$$

når vi velger nullpunkt for t slik at $t = 0$ ved $\tau = 0$.
Hvis bevegelsen skjer langs x-aksen, er

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = c\,\tanh\!\left(\frac{a\tau}{c}\right) = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{(at)^2}{c^2}}}\,,$$

og følgelig

$$x = x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{(at)^2}{c^2}} - 1\right) = x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\cosh\!\left(\frac{a\tau}{c}\right) - 1\right)\,.$$

Her er x_0 en integrasjonskonstant, som er posisjonen ved $t = 0$ og $\tau = 0$.
Denne formelen er interessant. Anta f.eks. at en romfarer drar ut på sin 20-års fødselsdag, og akselerer konstant med den jordiske tyngdeakselerasjonen $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Hvor langt er hun/han kommet på sin 30-årsdag? 40-årsdag? 50-årsdag? 60-årsdag?
Det er kanskje verdt å bemerke at vi også kunne ha funnet direkte v som funksjon av t. Vi har nemlig at

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\,.$$

Og dermed

$$a\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,.$$

Substituer f.eks. $v = c\sin u$, det gir at

$$at = \int \frac{c\cos u\,\mathrm{d}u}{\cos^3 u} = c\tan u = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Eller omvendt, samme resultat som før,

$$v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{(at)^2}{c^2}}}\,.$$

La m være hvilemassen til partikkelen, da er den relativistiske impulsen

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mat\,.$$

Kraften som virker på partikkelen er $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, den er altså lik ma, der a er akselerasjonen i det momentane hvilesystemet.

Hvis en løper med konstant akselerasjon, og får stort nok forsprang, er det mulig å løpe om kapp med et foton og aldri bli tatt igjen. Bevegelsesligningen for et foton er $x = x_1 + ct$, der x_1 er posisjonen ved $t = 0$. Avstanden fra fotonet fram til partikkelen som beveger seg med konstant akselerasjon, er

$$x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{(at)^2}{c^2}} - 1\right) - (x_1 + ct) = x_0 - \frac{c^2}{a} - x_1 + c\left(\sqrt{t^2+\frac{c^2}{a^2}} - t\right) > x_0 - \frac{c^2}{a} - x_1\,.$$

Ulikheten gjelder til ethvert tidspunkt. Hvis altså $x_0 > x_1 + (c^2/a)$, vil partikkelen aldri bli tatt igjen av fotonet. Det betyr at den som beveger seg med konstant akselerasjon, forfølges av en *horisont* som det er umulig å se forbi.

Oppgave 2

Vi ser det hele først fra det inertialsystemet der begge rakettene ligger i ro til å begynne med. Sett fra dette systemet må avstanden mellom dem være konstant lik en kilometer, både før, under og etter akselerasjonen, ettersom de manøvrerer fullkomment synkront.
Vi har forøvrig regnet ut dette ovenfor. Hvis de to rakettene begynner å akselerere ved $t = 0$, så er posisjonene ved tidspunktet t, mens de akselererer, henholdsvis

$$x_A(t) = x_A(0) + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{(at)^2}{c^2}} - 1\right) \quad \text{og} \quad x_B(t) = x_B(0) + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{(at)^2}{c^2}} - 1\right).$$

Avstanden mellom dem, sett fra dette inertialsystemet, er konstant,

$$x_A(t) - x_B(t) = x_A(0) - x_B(0) = 1 \text{ km}\,.$$

Vi fant ovenfor at den totale tiden T som de bruker på å akselerere fra hastighet null til $v = c/2$, med konstant akselerassjon a, er gitt ved at

$$aT = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{3}}\,.$$

I løpet av denne tiden beveger de seg en avstand

$$\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{(aT)^2}{c^2}} - 1\right) = \frac{(2-\sqrt{3})c^2}{\sqrt{3}\,a}\,.$$

Bevegelsen etter at de har sluttet å akselerere, er gitt ved at

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_A(0) + \frac{(2-\sqrt{3})c^2}{\sqrt{3}\,a} + \frac{c}{2}\left(t - \frac{c}{\sqrt{3}\,a}\right) = x_A(0) - \frac{(2-\sqrt{3})c^2}{2a} + \frac{ct}{2}\,, \\ x_B(t) &= x_B(0) - \frac{(2-\sqrt{3})c^2}{2a} + \frac{ct}{2}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Etter at de slutter å akselerere, og beveger seg med samme konstante hastighet, forandres heller ikke avstanden mellom dem, naturligvis. Avstanden er altså hele tiden 1 km sett fra dette inertialsystemet. Men denne avstanden på 1 km er Lorentz-kontrahert i forhold til avstanden som måles i et inertialsystem der rakettene ligger i ro etter akselerasjonen, og som altså beveger seg med en hastighet $v = c/2$. Avstanden målt i dette systemet er

$$L = \frac{1 \text{ km}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \text{ km}}{\sqrt{3}} = 1155 \text{ m}\,.$$

Dette er lengden av tauet slik tauet selv opplever det. De fleste tau vil ryke om de strekkes så mye.

En kort repetisjon om Lorentz-kontraksjon: Den henger sammen med at samtidighet er et relativt begrep, slik at to observatører i hvert sitt inertialsystem ikke har samme oppfatning av hvilke begivenheter som skjer samtidig. Hver observatør definerer lengden av tauet som avstanden mellom endepunktene ved ett og samme tidspunkt. I hvilesystemet til tauet etter akselerasjonen er posisjonene til endepunktene konstante, lik $\widetilde{x}_A$ og $\widetilde{x}_B$.
I det som var hvilesystemet til tauet før akselerasjonen er posisjonene til endepunktene etter akselerasjonen, ved et felles tidspunkt t, lik henholdsvis $x_A(t)$ og $x_B(t)$, gitt ved ligning (1) ovenfor. Lorentz-transformasjonen gir da at

$$\widetilde{x}_A = \frac{x_A(t) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad \widetilde{x}_B = \frac{x_B(t) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

og følgelig

$$\widetilde{x}_A - \widetilde{x}_B = \frac{x_A(t) - x_B(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Dette er Lorentz-kontraksjonsformelen.

Sett fra det opprinnelige hvilesystemet slutter begge rakettene å akselerere ved samme tidspunkt $t = T$. Men sett fra det andre inertialsystemet er ikke disse to begivenhetene samtidige. Sett derfra vil A slutte å akselerere ved tidspunktet

$$\widetilde{T}_A = \frac{T - \frac{v}{c^2}\, x_A(T)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

mens B slutter å akselerere ved tidspunktet

$$\widetilde{T}_B = \frac{T - \frac{v}{c^2}\, x_B(T)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Siden $x_A(T) > x_B(T)$, vil $\widetilde{T}_A < \widetilde{T}_B$. For observatører som følger med rakettene, vil det altså se ut som A kommer først opp i slutthastigheten $v = c/2$. Da må nødvendigvis avstanden mellom rakettene øke mens de akselererer.
Et tredje synspunkt er dette: Mens de to rakettene akselererer, vil observatører ombord i rakettene kunne beskrive det de observerer som resultat av at de befinner seg i et gravitasjonsfelt. En klokke ombord i raketten A befinner seg da høyere oppe i gravitasjonsfeltet enn en klokke ombord i B, og derfor går klokken i A litt fortere enn klokken i B. Selv om de to rakettene akselererer nøyaktig like lenge, i følge hver sin klokke, vil det se ut for dem begge to som at A gjør seg ferdig med akselerasjonen litt før B.