

Løsning, øving for TFY4270 Klassisk feltteori til 29/4 2004

La u være kurveparameter, og skriv $\dot{t} = dt/du$ og $\dot{r} = dr/du$. Vi går ut fra at $\theta = \text{konstant}$ og $\varphi = \text{konstant}$. Strengt tatt burde vi skrive opp bevegelsesligningene for θ og φ og sjekke at det er konsistent å anta at de er konstante. Et godt argument for å ta snarveien er at rotasjonssymmetrien impliserer bevaring av dreieimpuls, og radiell bevegelse kjennetegnes av at dreieimpulsen er null, det er konsistent med bevaring av dreieimpuls.

Vi definerer

$$w = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}.$$

Euler–Lagrange-ligningen for $t(u)$ er da:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial w}{\partial \dot{t}} \right) = 0.$$

Her er t en syklisk koordinat, dvs. at $\partial w / \partial t = 0$, derfor er

$$\frac{\partial w}{\partial \dot{t}} = \frac{1}{w} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \dot{t} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c \frac{dt}{d\tau} = A = \text{konstant},$$

når vi innfører buelengden s og egentiden $d\tau$ langs banen til partikkelen, slik at

$$ds = c d\tau = w du.$$

Av ligningen

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{w^2} \left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \left(A^2 - \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

får vi at

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = A^2 - c^2 + \frac{2GM}{r}.$$

Denne ligningen har samme form som den ikke-relativistiske energiligningen

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r},$$

der m er massen til partikkelen. Husk at energien E er bevart, i den ikke-relativistiske teorien.

Her spesialiserer vi til det tilfellet at $dr/d\tau \rightarrow 0$ når $r \rightarrow \infty$, det betyr som vi ser at $A = c$, slik at

$$d\tau = \pm \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{2GM}}.$$

For en innfallende partikkel er

$$\tau = \tau_0 - \frac{\sqrt{2} r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{GM}},$$

der τ_0 er en integrasjonskonstant, slik at $\tau = \tau_0$ for $r = 0$.

Dette resultatet er verdt opptil flere kommentarer, utover det som det var spørsmål om i oppgaven. Om vi tar formelen bokstavelig, sier den at det tar en endelig egentid

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{2} r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{GM}}$$

å falle fra en endelig radius r og helt inn til singulariteten i $r = 0$. Men det kan være spørsmål om vi har lov til å bruke formelen helt inn til $r = 0$. Utregningen vår her er i hvert fall ikke pålitelig, fordi det uttrykket vi har for metrikken, er singulært i Schwarzschild-radien

$$r = R_M = \frac{2GM}{c^2}.$$

Faktisk er formelen for $\Delta\tau$ gyldig, og en indikasjon på det er at den ikke på noen måte er singulær ved Schwarzschild-radien. Men for å bevise gyldigheten mer stringent, må vi finne et annet koordinatsystem der metrikken ikke er singulær. Det viser seg at det er nok å velge en annen tidskoordinat.

Vi har altså at

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \pm c \sqrt{\frac{R_M}{r}},$$

og for en innfallende partikkel er fortegnet minus. For $A = c$ er

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \frac{r}{r - R_M} = 1 + \frac{R_M}{r - R_M}.$$

Det gir at

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\tau}{dr/d\tau} = -\frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{r}{R_M}} + \frac{\sqrt{R_M r}}{r - R_M} \right).$$

Denne ligningen kan integreres, og gir da at

$$t = t_0 - \frac{1}{c} \left(\frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R_M}} + 2\sqrt{R_M r} + R_M \ln \left(\frac{|\sqrt{r} - \sqrt{R_M}|}{\sqrt{r} + \sqrt{R_M}} \right) \right).$$

Vi ser at t divergerer logaritmisk når radien r nærmer seg Schwarzschild-radien R_M . For øvrig kan denne ligningen leses slik:

$$t_0 = t + \frac{1}{c} \left(\frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R_M}} + 2\sqrt{R_M r} + R_M \ln \left(\frac{|\sqrt{r} - \sqrt{R_M}|}{\sqrt{r} + \sqrt{R_M}} \right) \right).$$

Og så kan vi bruke t_0 , definert ved denne ligningen, som tidskoordinat, i stedet for t . Det viser seg da at når vi uttrykker metrikken ved koordinatene t_0, r, θ og φ , så blir den ikke-singulær. Men det er en annen historie, som vi ikke går nærmere inn på her.

Vi har som sagt at

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Men er dette den hastigheten v som en observatør i ro i posisjonen r måler for den partikkelen som kommer fallende fra $r = \infty$? Observatøren måler en hastighet

$$v = \frac{d\sigma}{d\tilde{t}} ,$$

der $d\sigma$ er en infinitesimal avstand, målt med et målebånd i ro, og $d\tilde{t}$ er et infinitesimalt tidisintervall, målt med en klokke i ro. Husk at $d\tau$ er egentidsintervallet målt med en klokke som faller med partikkelen, altså er $d\tilde{t} \neq d\tau$. Dessuten er $d\tilde{t} \neq dt$, husk at koordinatintervallet dt måles med en klokke uendelig langt borte.

Både $d\sigma$ og $d\tilde{t}$ kan vi lese ut av metrikken

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} .$$

For en observatør i ro er $dr = 0$, og

$$c^2 d\tilde{t}^2 = ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 .$$

Altså er

$$d\tilde{t} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} . \quad (1)$$

Når den samme observatøren måler romlig avstand ved konstant tid t , gjelder at

$$-d\sigma^2 = ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} ,$$

altså er

$$d\sigma = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} .$$

Og hastigheten er da

$$v = \pm \frac{d\sigma}{d\tilde{t}} = \pm \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}} . \quad (2)$$

Merkelig nok gir den generelle relativitetsteorien i dette tilfellet en formel som er identisk med den Newtonske formelen.

Vi har forøvrig en annen metode til å beregne v . Lokalt sett, i et lite område av tid og rom, gjelder nemlig den spesielle relativitetsteorien. I følge den er tidsdilatasjonen for en klokke som beveger seg med hastighet v , sammenlignet med en klokke i ro, gitt av formelen

$$d\tau = d\tilde{t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Sammen med ligning (1) gir det igjen ligning (2).

Unnslipningshastigheten fra overflaten av en stjerne med masse M og radius $r = R$ er, i følge ligning (2),

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} .$$

Denne unnslipningshastigheten er den samme hastigheten som en observatør i ro på stjerneoverflaten vil observere for en stein som kommer fallende ned, når steinen hadde null hastighet uendelig langt borte. Siden den spesielle relativitetsteorien er gyldig *lokalt*, dvs. i et lite område rundt denne observatøren, kan vi beregne den kinetiske energien E_K til steinen idet den treffer overflaten ved formelen

$$E_K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} - mc^2 .$$

Hvis all den kinetiske energien stråles ut i form av elektromagnetisk stråling, så observeres den uendelig langt borte med en gravitasjonsrødforskyvingsfaktor

$$f = \frac{d\tilde{t}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} ,$$

sammenlign ligning (1). Den maksimale energien vi kan få tilbake som elektromagnetisk stråling ved å kaste stein på en stjerne, er altså

$$E_K f = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \right) .$$

Hvis vi setter M lik solmassen, $M = 2 \times 10^{30}$ kg, så er den tilsvarende Schwarzschild-radien

$$R_M = \frac{2GM}{c^2} = 3 \text{ km} .$$

Fra overflaten av en hvit dvergstjerne med denne massen og med radius $R = 5000$ kilometer er unnslipningshastigheten

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \sqrt{\frac{R_M}{R}} = c \sqrt{\frac{3}{5000}} = 0,024 c = 7\,200 \text{ km/s} .$$

Fra overflaten av en nøytronstjerne med samme masse og med radius 15 kilometer er unnslipningshastigheten

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \sqrt{\frac{R_M}{R}} = c \sqrt{\frac{3}{15}} = 0,45 c = 135\,000 \text{ km/s} .$$

Den brøkdelen av massen vi kan få tilbake som stråling ved å kaste stein på en nøytronstjerne er

$$1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} = 1 - \sqrt{0,8} = 0,11 .$$

Til sammenligning kan de kjernefysiske prosessene i stjerner gi et utbytte på mindre enn en prosent. De mest stabile atomkjernene, rundt jern i det periodiske systemet, har nemlig en bindingsenergi på ca. 9 MeV pr. nukleon, mens massen til et nukleon (proton eller nøytron) er rundt 939 MeV/ c^2 .