Løsning, øving for TFY4270 Klassisk feltteori til 29/4 2004

La u være kurveparameter, og skriv $\dot{t} = \mathrm{d}t/\mathrm{d}u$ og $\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}u$. Vi går ut fra at $\theta =$ konstant og $\varphi =$ konstant. Strengt tatt burde vi skrive opp bevegelsesligningene for θ og φ og sjekke at det er konsistent å anta at de er konstante. Et godt argument for å ta snarveien er at rotasjonssymmetrien impliserer bevaring av dreieimpuls, og radiell bevegelse kjennetegnes av at dreieimpulsen er null, det er konsistent med bevaring av dreieimpuls.

Vi definerer

$$w = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}\,.$$

Euler–Lagrange-ligningen for $t(u)$ er da:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{t}}\right) = 0\,.$$

Her er t en syklisk koordinat, dvs. at $\partial w/\partial t = 0$, derfor er

$$\frac{\partial w}{\partial \dot{t}} = \frac{1}{w}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, \dot{t} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c\, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = A = \text{konstant}\,,$$

når vi innfører buelengden s og egentiden $\mathrm{d}\tau$ langs banen til partikkelen, slik at

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau = w\,\mathrm{d}u\,.$$

Av ligningen

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{w^2}\left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}\left(A^2 - \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right) \end{aligned}$$

får vi at

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = A^2 - c^2 + \frac{2GM}{r}\,.$$

Denne ligningen har samme form som den ikke-relativistiske energiligningen

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{GMm}{r}\,,$$

der m er massen til partikkelen. Husk at energien E er bevart, i den ikke-relativistiske teorien.

Her spesialiserer vi til det tilfellet at $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau \to 0$ når $r \to \infty$, det betyr som vi ser at $A = c$, slik at

$$\mathrm{d}\tau = \pm\frac{\sqrt{r}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2GM}}\,.$$

For en innfallende partikkel er

$$\tau = \tau_0 - \frac{\sqrt{2}\, r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{GM}} \,,$$

der τ_0 er en integrasjonskonstant, slik at $\tau = \tau_0$ for $r = 0$.

Dette resultatet er verdt opptil flere kommentarer, utover det som det var spørsmål om i oppgaven. Om vi tar formelen bokstavelig, sier den at det tar en endelig egentid

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{2}\, r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{GM}}$$

å falle fra en endelig radius r og helt inn til singulariteten i $r = 0$. Men det kan være spørsmål om vi har lov til å bruke formelen helt inn til $r = 0$. Utregningen vår her er i hvert fall ikke pålitelig, fordi det uttrykket vi har for metrikken, er singulært i Schwarzschild-radien

$$r = R_M = \frac{2GM}{c^2} \,.$$

Faktisk er formelen for $\Delta\tau$ gyldig, og en indikasjon på det er at den ikke på noen måte er singulær ved Schwarzschild-radien. Men for å bevise gyldigheten mer stringent, må vi finne et annet koordinatsystem der metrikken ikke er singulær. Det viser seg at det er nok å velge en annen tidskoordinat.

Vi har altså at

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{r}} = \pm c\,\sqrt{\frac{R_M}{r}} \,,$$

og for en innfallende partikkel er fortegnet minus. For $A = c$ er

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}} = \frac{r}{r - R_M} = 1 + \frac{R_M}{r - R_M} \,.$$

Det gir at

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{c}\left(\sqrt{\frac{r}{R_M}} + \frac{\sqrt{R_M r}}{r - R_M}\right).$$

Denne ligningen kan integreres, og gir da at

$$t = t_0 - \frac{1}{c}\left(\frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R_M}} + 2\sqrt{R_M r} + R_M \ln\left(\frac{|\sqrt{r} - \sqrt{R_M}|}{\sqrt{r} + \sqrt{R_M}}\right)\right).$$

Vi ser at t divergerer logaritmisk når radien r nærmer seg Schwarzschild-radien R_M. For øvrig kan denne ligningen leses slik:

$$t_0 = t + \frac{1}{c}\left(\frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R_M}} + 2\sqrt{R_M r} + R_M \ln\left(\frac{|\sqrt{r} - \sqrt{R_M}|}{\sqrt{r} + \sqrt{R_M}}\right)\right).$$

Og så kan vi bruke t_0, definert ved denne ligningen, som tidskoordinat, i stedet for t. Det viser seg da at når vi uttrykker metrikken ved koordinatene t_0, r, θ og φ, så blir den ikke-singulær. Men det er en annen historie, som vi ikke går nærmere inn på her.

Vi har som sagt at

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{r}} \,.$$

Men er dette den hastigheten v som en observatør i ro i posisjonen r måler for den partikkelen som kommer fallende fra $r = \infty$? Observatøren måler en hastighet

$$v = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{t}} \,,$$

der $\mathrm{d}\sigma$ er en infinitesimal avstand, målt med et målebånd i ro, og $\mathrm{d}\widetilde{t}$ er et infinitesimalt tidisintervall, målt med en klokke i ro. Husk at $\mathrm{d}\tau$ er egentidsintervallet målt med en klokke som faller med partikkelen, altså er $\mathrm{d}\widetilde{t} \neq \mathrm{d}\tau$. Dessuten er $\mathrm{d}\widetilde{t} \neq \mathrm{d}t$, husk at koordinatintervallet $\mathrm{d}t$ måles med en klokke uendelig langt borte.

Både $\mathrm{d}\sigma$ og $\mathrm{d}\widetilde{t}$ kan vi lese ut av metrikken

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \,.$$

For en observatør i ro er $\mathrm{d}r = 0$, og

$$c^2\,\mathrm{d}\widetilde{t}^{\,2} = \mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 \,.$$

Altså er

$$\mathrm{d}\widetilde{t} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\;\mathrm{d}t = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\;\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} \,. \tag{1}$$

Når den samme observatøren måler romlig avstand ved konstant tid t, gjelder at

$$-\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}s^2 = -\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \,,$$

altså er

$$\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} \,.$$

Og hastigheten er da

$$v = \pm\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{t}} = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{\frac{2GM}{r}} \,. \tag{2}$$

Merkelig nok gir den generelle relativitetsteorien i dette tilfellet en formel som er identisk med den Newtonske formelen.

Vi har forøvrig en annen metode til å beregne v. Lokalt sett, i et lite område av tid og rom, gjelder nemlig den spesielle relativitetsteorien. I følge den er tidsdilatasjonen for en klokke som beveger seg med hastighet v, sammenlignet med en klokke i ro, gitt av formelen

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\widetilde{t}\,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \,.$$

Sammen med ligning (1) gir det igjen ligning (2).

Unnslipningshastigheten fra overflaten av en stjerne med masse M og radius $r = R$ er, i følge ligning (2),

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \, .$$

Denne unnslipningshastigheten er den samme hastigheten som en observatør i ro på stjerneoverflaten vil observere for en stein som kommer fallende ned, når steinen hadde null hastighet uendelig langt borte. Siden den spesielle relativitetsteorien er gyldig *lokalt*, dvs. i et lite område rundt denne observatøren, kan vi beregne den kinetiske energien E_K til steinen idet den treffer overflaten ved formelen

$$E_K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} - mc^2 \, .$$

Hvis all den kinetiske energien stråles ut i form av elektromagnetisk stråling, så observeres den uendelig langt borte med en gravitasjonsrødforskyvingsfaktor

$$f = \frac{\mathrm{d}\widetilde{t}}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \, ,$$

sammenlign ligning (1). Den maksimale energien vi kan få tilbake som elektromagnetisk stråling ved å kaste stein på en stjerne, er altså

$$E_K f = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \right) .$$

Hvis vi setter M lik solmassen, $M = 2 \times 10^{30}$ kg, så er den tilsvarende Schwarzschild-radien

$$R_M = \frac{2GM}{c^2} = 3 \text{ km} \, .$$

Fra overflaten av en hvit dvergstjerne med denne massen og med radius $R = 5000$ kilometer er unnslipningshastigheten

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \sqrt{\frac{R_M}{R}} = c \sqrt{\frac{3}{5000}} = 0{,}024\, c = 7\,200 \text{ km/s} \, .$$

Fra overflaten av en nøytronstjerne med samme masse og med radius 15 kilometer er unnslipningshastigheten

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \sqrt{\frac{R_M}{R}} = c \sqrt{\frac{3}{15}} = 0{,}45\, c = 135\,000 \text{ km/s} \, .$$

Den brøkdelen av massen vi kan få tilbake som stråling ved å kaste stein på en nøytronstjerne er

$$1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} = 1 - \sqrt{0{,}8} = 0{,}11 \, .$$

Til sammenligning kan de kjernefysiske prosessene i stjerner gi et utbytte på mindre enn en prosent. De mest stabile atomkjernernene, rundt jern i det periodiske systemet, har nemlig en bindingsenergi på ca. 9 MeV pr. nukleon, mens massen til et nukleon (proton eller nøytron) er rundt 939 MeV/c^2.