NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag TFY 4270 Klassisk feltteori
Onsdag 26. mai 2004
Tid: 09.00–15.00

Sensurfrist: Onsdag 16. juni 2004

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Fysiske konstanter:	
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Newtons gravitasjonskonstant:	$G = 6,673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Einsteins gravitasjonskonstant:	$\kappa = 8\pi G/c^4$

Oppgave 1:

Lagrange-funksjonen for en fri punktpartikkel med masse m, i spesiell relativitetsteori, er

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Posisjonen ved tiden t er $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, og hastigheten er $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$.

a) Hva er sammenhengen mellom koordinattiden t og egentiden τ til partikkelen?
Vis at den relativistiske impulsen

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\mathbf{i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\,\mathbf{j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\,\mathbf{k}$$

kan uttrykkes slik:

$$\boldsymbol{p} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\ .$$

Uttrykk Hamiltonfunksjonen $H = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L$ både som funksjon av hastigheten $\boldsymbol{v}$ og som funksjon av impulsen $\boldsymbol{p}$.

b) Hvilke symmetrier og bevaringslover har dette systemet? Svar ganske kort.

c) Vi transformerer nå fra kartesiske koordinater (x, y, z) til elliptiske koordinater (r, θ, φ), definert ved at

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2}\, \sin\theta\, \cos\varphi \;, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2}\, \sin\theta\, \sin\varphi \;, \\ z &= r\, \cos\theta \;. \end{aligned}$$

Finn et uttrykk for v^2 i elliptiske koordinater.
Finn et uttrykk for den kanoniske impulsen konjugert til φ, definert som

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \;,$$

og vis at den er en bevegelseskonstant.
Hvilken symmetri er opphav til denne bevaringsloven?

Anta nå at partikkelen beveger seg i et ytre gravitasjonsfelt, der den metriske tensoren er en funksjon av tid og sted, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Koordinatene $x^\mu = x^\mu(u)$ angir et punkt på banen til partikkelen, med en vilkårlig valgt kurveparameter u, og vi skriver

$$\dot{x}^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}u} \;.$$

Buelengden s og egentiden τ langs banen er gitt ved at $\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau = w\,\mathrm{d}u$, der

$$w = \sqrt{g_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \;.$$

d) Bevegelsesligningene for partikkelen kan utledes som Euler–Lagrange-ligninger,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0 \;,$$

fra Lagrange-funksjonen $L = -mcw$. Vi definerer den kanoniske impulsen som

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \;.$$

De samme bevegelsesligningene kan da utledes som Hamiltons ligninger,

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial H'}{\partial P_\mu} \;, \qquad \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H'}{\partial x^\mu} \;,$$

fra Hamilton-funksjonen

$$H' = -\frac{1}{2m}\, g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \;.$$

Vis at de Euler–Lagrange-ligningene som følger fra denne Lagrange-funksjonen L, er ekvivalente med de Hamilton-ligningene som følger fra Hamilton-funksjonen H'.

(Merk at når impulskomponentene P_0, P_1, P_2, P_3 har fysisk mulige verdier, så er $H' = -mc^2/2$ identisk. Men når vi utleder Hamiltons ligninger fra H', må vi behandle H' som en funksjon av x^0, x^1, x^2, x^3 og P_0, P_1, P_2, P_3, og ikke som en konstant.)

Oppgave 2:

Kerr-metrikken beskriver gravitasjonsfeltet fra et roterende svart hull med masse M og dreieimpuls (langs z-aksen) lik Mca, der c er lyshastigheten og a er en konstant med dimensjon av lengde. I ekvatorialplanet har Kerr-metrikken følgende form,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{R_M}{r}\,(c\,\mathrm{d}t - a\,\mathrm{d}\varphi)^2 - (r^2 + a^2)\,\mathrm{d}\varphi^2 - \frac{r^2\,\mathrm{d}r^2}{r^2 - R_M r + a^2} \ .$$

Her er t koordinattiden, mens r og φ svarer til de elliptiske koordinatene i oppgave 1 (i ekvatorialplanet er $\theta = \pi/2$). R_M er Schwarzschild-radien,

$$R_M = \frac{2GM}{c^2} \ .$$

For å forenkle notasjonen definerer vi

$$A = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) c^2 \ , \qquad B = \frac{R_M\,ca}{r} \ , \qquad C = r^2 + \left(1 + \frac{R_M}{r}\right) a^2 \ ,$$

$$D = \frac{r^2}{r^2 - R_M r + a^2} = \frac{c^2 r^2}{AC + B^2} \ ,$$

slik at

$$\mathrm{d}s^2 = A\,\mathrm{d}t^2 + 2B\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi - C\,\mathrm{d}\varphi^2 - D\,\mathrm{d}r^2 \ .$$

Anta at en punktpartikkel med masse m beveger seg i dette gravitasjonsfeltet, i ekvatorialplanet. Vi har da tre koordinater $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, og vi kan definere $P_t = cP_0$, $P_r = P_1$, $P_\varphi = P_2$. Som vist i oppgave 1, kan bevegelsesligningene utledes fra Hamilton-funksjonen

$$H' = -\frac{1}{2m}\,g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \ .$$

a) En komponent i den metriske tensoren, nemlig $g_{00} = A/c^2$, går mot null og skifter fortegn ved $r = R_M$. Den spesielle radien $r = R_M$ kalles *den statiske grensen*, fordi en partikkel som befinner seg innenfor denne radien ikke kan ligge i ro slik at $r =$ konstant og $\varphi =$ konstant.
Denne konklusjonen kan leses ut av metrikken, dvs. uttrykket for $\mathrm{d}s^2$. Hvordan?

b) Dersom $R_M > 2|a| > 0$, så vil en annen komponent i den metriske tensoren, nemlig $g_{22} = -D$, gå mot uendelig og skifte fortegn ved $r = r_+$ og $r = r_-$, der

$$r_\pm = \frac{R_M \pm \sqrt{R_M^2 - 4a^2}}{2} \ .$$

Merk at både r_+ og r_- ligger innenfor den statiske grensen R_M. Det viser seg at disse spesielle verdiene for r er koordinatsingulariteter i Kerr-metrikken, på tilsvarende måte som Schwarzschild-radien R_M er en koordinatsingularitet i Schwarzschild-metrikken. En koordinatsingularitet kan transformeres bort ved et skifte av koordinater. Likevel har radiene r_+ og r_- også en klar fysisk betydning, uavhengig av koordinatsystem (tilsvarende den betydningen som Schwarzschild-radien har i Schwarzschild-metrikken). Hvilken fysisk betydning? Begrunn svaret.

c) Vis at

$$H' = -\frac{1}{2m}\left(\frac{C{P_t}^2 + 2BP_tP_\varphi - A{P_\varphi}^2}{AC + B^2} - \frac{{P_r}^2}{D}\right) = -\frac{1}{2m}\left(\frac{{P_t}^2}{A} - \frac{(AP_\varphi - BP_t)^2}{A(AC+B^2)} - \frac{{P_r}^2}{D}\right).$$

d) Skriv ut Hamiltons ligninger som bestemmer t, P_t, φ og P_φ som funksjoner av egentiden τ (se oppgave 1d) ovenfor).
Hvilke symmetrier er det som impliserer at P_t og P_φ er bevegelseskonstanter?
Hvilken fysisk betydning har størrelsene P_t og P_φ, utover det at de er kanonisk konjugerte impulser til t og φ?

e) Bruk identiteten $H' = -mc^2/2$ til å vise at ${P_t}^2 \geq Am^2c^2$.
For hvilke verdier av P_t kan partikkelen bevege seg uendelig langt bort?
Hvorfor må $P_t < 0$ i grensen $r \to \infty$?

Oppgave 3:

a) Gitt et Klein–Gordon-felt med følgende Lagrange–tetthet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\,\phi_{,\mu}\,\phi_{,\nu} + \lambda_2\phi^2 - \lambda_4\phi^4\right),$$

der $\lambda_2 > 0$ og $\lambda_4 > 0$ er konstanter, og

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finn feltligningen.
En løsning av feltligningen er $\phi = 0$. Er denne løsningen stabil eller ustabil?

b) Energi-impulstensoren for Klein–Gordon-feltet er

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\nu\rho}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\rho}}\,\phi_{,\mu} - \eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L}\,.$$

Vakuumtilstanden til et felt er som regel den løsningen av feltligningen som er slik at energitettheten er minimal. Finn vakuumløsningen for dette Klein–Gordon-feltet, og energi-impulstensoren for denne spesielle løsningen.
Forklar hvordan dette er en mulig modell for den kosmologiske konstanten Λ i Einsteins gravitasjonsligning

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}\,.$$