NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag TFY 4270 Klassisk feltteori
Onsdag 1. juni 2005
Tid: 09.00–13.00

Sensurfrist: Onsdag 22. juni 2005

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Fysiske konstanter:
Lyshastigheten i vakuum: $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum: $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

En symmetrisk og metrisk konneksjon kan uttrykkes ved den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$ som

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\kappa\lambda} \left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right) \ .$$

Da er den metriske tensoren kovariant konstant:

$$g_{\lambda\mu;\nu} = g_{\lambda\mu,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}\, g_{\kappa\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\, g_{\lambda\kappa} = 0 \ .$$

Oppgave 1:

En geodetisk kurve $x^\mu = x^\mu(u)$, med kurveparameter u, er en løsning av geodeseligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}u^2} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}\, \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u}\, \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} = 0 \ .$$

Det er naturlig å kalle en geodetisk kurve for en «rett linje». Hvorfor?
Hva er den geometriske tolkningen av størrelsen

$$w = \sqrt{g_{\kappa\lambda}\, \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u}\, \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u}} \quad ?$$

Vis at hvis konneksjonen $\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}$ er metrisk og symmetrisk, så er w en bevegelseskonstant langs en geodetisk kurve.

Oppgave 2:

Lagrange-tettheten for det frie elektromagnetiske feltet A_μ i et ytre gravitasjonsfelt $g_{\mu\nu}$ er

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} \sqrt{|g|}\, g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\, F_{\mu\nu}\, F_{\rho\sigma} \ . \tag{1}$$

Her er $g = \det(g_{\mu\nu})$, og $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$.
Vis at Maxwells ligninger, som følger fra denne Lagrange-tettheten, har formen

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu} \right) = 0 \ . \tag{2}$$

Oppgave 3:

Friedmann–Robertson–Walker-metrikken (kortere: FRW-metrikken) brukes i de fleste aktuelle kosmologiske modellene. Med en universell tidskoordinat $x^0 = ct$ og tre romlige polarkoordinater $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ og $x^3 = \varphi$ ser FRW-metrikken slik ut:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu = c^2\, \mathrm{d}t^2 - a^2 \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2\right) \right) .$$

Den inneholder en tidsavhengig skalafaktor $a = a(t)$, og en konstant k som er enten 0, +1 eller −1.

a) FRW-metrikken er den mest generelle metrikken som er homogen og isotrop i det tredimensjonale rommet. Hva betyr det at den er homogen og isotrop?
Hva er betydningen av konstanten k?

Vi vil studere bevegelsen av en partikkel med en liten masse m i denne metrikken. Lagrangefunksjonen er

$$L = -mcw \ ,$$

når vi innfører en kurveparameter u og skriver

$$w = \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} \ .$$

For enkelhets skyld antar vi heretter at $k = 0$.

b) Vis at når $k = 0$, og vi innfører koordinatene $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$, så er

$$w = \sqrt{c^2\, \dot{t}^2 - a^2\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \ .$$

Husk at a er tidsavhengig, $a = a(t)$.

c) Hvilke symmetrier og bevaringslover gjelder? Svar ganske kort.
Hvis vi setter $k = +1$ eller $k = -1$ istedenfor $k = 0$, blir det da færre, like mange eller flere bevaringslover?

d) Finn Euler–Lagrange-ligningene for partikkelen.
Hvis universet ekspanderer slik at $a(t) \to \infty$ når $t \to \infty$, hva skjer da med partikkelen?

e) Hvordan ser Maxwells ligninger ut, for et fritt elektromagnetisk felt (uten kilder), i FRW-metrikken med $k = 0$?
Du kan sette inn FRW-metrikken enten direkte i ligning (2), eller i Lagrange-tettheten i ligning (1).