Eksamen i Klassisk feltteori, fag TFY 4270
Onsdag 1. juni 2005
Løsninger

1) En geodetisk kurve $x^\mu = x^\mu(u)$, med kurveparameter u, er en løsning av geodeseligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}u^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} = 0 \; .$$

Det er naturlig å kalle en geodetisk kurve for en ≪rett linje≫. Hvorfor?
Hva er den geometriske tolkningen av størrelsen

$$w = \sqrt{g_{\kappa\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u}} \quad ?$$

Vis at hvis konneksjonen $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$ er metrisk og symmetrisk, så er w en bevegelseskonstant langs en geodetisk kurve.

La A^μ være tangentvektoren til kurven,

$$A^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}u} \; .$$

Geodeseligningen kan da skrives slik:

$$\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}u} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} A^\kappa \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} = 0 \; .$$

Denne ligningen sier at tangentvektoren A^μ er parallell langs kurven, og det er nettopp en av egenskapene som kjennetegner en rett linje i Euklidsk geometri.
Hvis konneksjonen er metrisk og symmetrisk, noe som ikke ble forutsatt i oppgaven, så har den geodetiske kurven ekstremal lengde (minimal eller maksimal, eller ingen av delene). Dette er en annen egenskap som kjennetegner en rett linje i Euklidsk geometri. Et slikt svar på oppgaven må godkjennes.
Lengden av tangentvektoren A^μ er

$$w = \sqrt{g_{\kappa\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u}} = \sqrt{g_{\kappa\lambda} A^\kappa A^\lambda} \; .$$

At w er konstant, som følge av geodeseligningen, viser vi ved direkte utregning. Vi kan kvadrere først, så vi blir kvitt kvadratrottegnet. Vi viser altså at w^2 er konstant:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(w^2)}{\mathrm{d}u} &= \frac{\mathrm{d}g_{\kappa\lambda}}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} + g_{\kappa\lambda} \frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}u^2} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} + g_{\kappa\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}u^2} \\
&= \left(g_{\kappa\lambda,\rho} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}u} \right) \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} - g_{\kappa\lambda} \left(\Gamma^\kappa_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} \right) \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} - g_{\kappa\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}u} \right) \\
&= \left(g_{\kappa\lambda,\rho} - g_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\kappa\rho} - g_{\kappa\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} \right) \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}u} \; .
\end{aligned}$$

Uttrykket i den siste parentesen er den kovariante deriverte av metrikken,

$$g_{\kappa\lambda;\rho} = g_{\kappa\lambda,\rho} - g_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\kappa\rho} - g_{\kappa\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} \; .$$

At konneksjonen er metrisk og symmetrisk, betyr pr. definisjon at den kovariante deriverte av metrikken er null, $g_{\kappa\lambda;\rho} = 0$. Da er w^2 konstant, nemlig

$$\frac{\mathrm{d}(w^2)}{\mathrm{d}u} = 0 \ .$$

2) Lagrange-tettheten for det frie elektromagnetiske feltet A_μ i et ytre gravitasjonsfelt $g_{\mu\nu}$ er

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} \sqrt{|g|} \, g^{\mu\rho} \, g^{\nu\sigma} \, F_{\mu\nu} \, F_{\rho\sigma} \ . \tag{1}$$

Here er $g = \det(g_{\mu\nu})$, og $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$.
Vis at Maxwells ligninger, som følger fra denne Lagrange-tettheten, har formen

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{|g|} \, F^{\mu\nu} \right) = 0 \ . \tag{2}$$

Euler–Lagrange-ligningene har formen

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\kappa} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\lambda} \left(\sqrt{|g|} \, g^{\mu\rho} \, g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \, F_{\rho\sigma} + F_{\mu\nu} \, \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\kappa,\lambda}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\sqrt{|g|} \, g^{\mu\rho} \, g^{\nu\sigma} \left((\delta^\kappa_\nu \, \delta^\lambda_\mu - \delta^\kappa_\mu \, \delta^\lambda_\nu) \, F_{\rho\sigma} + F_{\mu\nu} \, (\delta^\kappa_\sigma \, \delta^\lambda_\rho - \delta^\kappa_\rho \, \delta^\lambda_\sigma) \right) \right) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\sqrt{|g|} \left((\delta^\kappa_\nu \, \delta^\lambda_\mu - \delta^\kappa_\mu \, \delta^\lambda_\nu) \, F^{\mu\nu} + F^{\rho\sigma} \, (\delta^\kappa_\sigma \, \delta^\lambda_\rho - \delta^\kappa_\rho \, \delta^\lambda_\sigma) \right) \right) \\
&= \frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\sqrt{|g|} \left(F^{\lambda\kappa} - F^{\kappa\lambda} + F^{\lambda\kappa} - F^{\kappa\lambda} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\sqrt{|g|} \, F^{\kappa\lambda} \right)
\end{aligned}$$

Dette er den oppgitte ligningen (2), som skulle vises.

3a) FRW-metrikken er den mest generelle metrikken som er homogen og isotrop i det tredimensjonale rommet.
Hva betyr det at den er homogen og isotrop?
Hva er betydningen av konstanten k?

At metrikken er *isotrop* (underforstått: i ett punkt), betyr at den «ser likedan ut i alle retninger» (som sett fra dette punktet). Når vi sier rett og slett at den er isotrop, mener vi med det at den er isotrop som sett fra et vilkårlig punkt.
At metrikken er *homogen*, betyr at den «ser likedan ut i ethvert punkt».
Disse definisjonene er litt vage, men er presise nok som svar her.
Konstanten k forteller om det tredimensjonale rommet, ved konstant universell tid t, er flatt ($k = 0$), positivt krummet, som en kuleflate ($k = +1$), eller negativt krummet, som en sadelformet flate ($k = -1$).

3b) Vi vil studere bevegelsen av en partikkel med en liten masse m i denne metrikken. Lagrange-funksjonen er

$$L = -mcw \ ,$$

når vi innfører en kurveparameter u og skriver

$$w = \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} \ .$$

For enkelhets skyld antar vi heretter at $k = 0$.
Vis at når $k = 0$, og vi innfører koordinatene $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$, så er

$$w = \sqrt{c^2 \, \dot{t}^2 - a^2 \, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)} \ .$$

Husk at a er tidsavhengig, $a = a(t)$.

Når $k = 0$, har vi at

$$\begin{aligned} w &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = \frac{\sqrt{c^2 \, \mathrm{d}t^2 - a^2 \left(\mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\!\theta \, \mathrm{d}\varphi^2\right)\right)}}{\mathrm{d}u} \\ &= \sqrt{c^2 \, \dot{t}^2 - a^2 \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\!\theta \, \dot{\varphi}^2\right)\right)} \ . \end{aligned}$$

Av definisjonene $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$ følger det at

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin\theta \cos\varphi + r\dot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - r\dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi \ , \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin\theta \sin\varphi + r\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + r\dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi \ , \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos\theta - r\dot{\theta} \sin\theta \ , \end{aligned}$$

og videre at

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\!\theta \, \dot{\varphi}^2\right) \ .$$

Dermed har vi utledet det oppgitte uttrykket for w.

3c) Hvilke symmetrier og bevaringslover gjelder? Svar ganske kort.
Hvis vi setter $k = +1$ eller $k = -1$ istedenfor $k = 0$, blir det da færre, like mange eller flere bevaringslover?

Fordi metrikken er homogen i det tredimensjonale rommet, har vi translasjonssymmetri i rommet, og det impliserer bevaring av den tredimensjonale impulsen.
Fordi metrikken er isotrop i det tredimensjonale rommet, har vi rotasjonssymmetri, og det impliserer bevaring av dreieimpulsen (impulsmomentet).
Vi har symmetri under paritetstransformasjonen (rominversjonen) $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$, $z \mapsto -z$, den gir som vanlig ingen Noethersk bevaringslov.
Vi har ikke tidstranslasjonssymmetri og energibevaring, fordi metrikken er eksplisitt tidsavhengig gjennom koeffisienten $a = a(t)$.
Fordi $a(-t) \neq a(t)$, i alminnelighet, har vi heller ikke symmetri under tidsreversjonen $t \mapsto -t$.
Både isotropi og homogenitet gjelder for alle verdier av k, derfor har vi like mange symmetrier og bevaringslover, uavhengig av k.
For $k \neq 0$ ser riktignok translasjonene litt annerledes ut enn for $k = 0$. Det kan vi se for

oss hvis vi sammenligner et todimensjonalt flatt rom, altså et plan, med en todimensjonal kuleflate. Hvis vi sitter i ett punkt enten i planet eller på kuleflaten, så kan vi rotere om dette punktet, det er en transformasjon som fungerer på samme måte i de to tilfellene. Men det som svarer til en translasjon i planet, som altså flytter det punktet vi sitter i, det er en rotasjon *om et annet punkt* på kuleflaten.

3d) Finn Euler–Lagrange-ligningene for partikkelen.
Hvis universet ekspanderer slik at $a(t) \to \infty$ når $t \to \infty$, hva skjer da med partikkelen?

Det er nok enklest å bruke koordinatene t, x, y, z.
Til tidskoordinaten t svarer Euler–Lagrange-ligningen

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = mca\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\,\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{w} + mc\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{c^2\,\dot{t}}{w}\right) = 0\ .$$

Vi kan innføre egentiden τ, definert ved at

$$\mathrm{d}s = w\,\mathrm{d}u = c\,\mathrm{d}\tau\ .$$

Dessuten dividerer vi ligningen ovenfor med mcw, det gir ligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{a}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right) = 0\ .$$

Romkoordinaten x er en syklisk koordinat, dvs. at $\partial w/\partial x = 0$, og Euler–Lagrange-ligningen

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

sier rett og slett at impulsen i x-retningen er bevart,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mc\,\frac{a^2\dot{x}}{w} = ma^2\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \text{konstant}\ .$$

Det samme gjelder i y- og z-retningene, altså:

$$p_y = ma^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \text{konstant}\ , \qquad p_z = ma^2\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \text{konstant}\ .$$

Siden

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_x}{ma^2}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_y}{ma^2}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_z}{ma^2}\ ,$$

ser vi at alle hastighetskomponentene $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$ og $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau$ går mot null når $a \to \infty$.
Dette er for så vidt godt nok svar på spørsmålet.
Men hastigheten målt i meter pr. sekund, f.eks. i x-retningen, er ikke $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, den er

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}t} = a\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\ ,$$

der $\mathrm{d}\sigma_x$ er avstanden i x-retningen (målt i meter) som partikkelen tilbakelegger i tidsintervallet $\mathrm{d}t$ (målt i sekunder). Vi har at

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\ ,$$

og i følge den oppgitte metrikken $\mathrm{d}s^2$ er

$$\mathrm{d}\sigma_x = \sqrt{a^2\,\mathrm{d}x^2} = a\,|\mathrm{d}x|\;.$$

Vi kan gå videre og løse Euler–Lagrange-ligningene litt mer eksplisitt.
Innsetting i ligningen for t gir at

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{m^2c^2a^3}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\,(p_x^2+p_y^2+p_z^2) = \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{p^2}{m^2c^2a^3}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0\;,$$

når vi forenkler notasjonen ved å skrive

$$p^2 = p_x^2+p_y^2+p_z^2\;.$$

Multiplikasjon med $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ gir ligningen

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{p^2}{m^2c^2a^3}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = 0\;,$$

som vi kan integrere til

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{p^2}{2m^2c^2a^2} = A\;,$$

med en integrasjonskonstant A. Sammenlign med definisjonen av egentiden τ:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - a^2\,(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2) = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{p^2\,\mathrm{d}\tau^2}{m^2a^2}\;.$$

Divisjon med $\mathrm{d}\tau^2$ gir at

$$c^2 = c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{p^2}{m^2a^2}\;.$$

Vi ser at $A = 1/2$, og at

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2a^2}} = \frac{\sqrt{m^2c^2a^2+p^2}}{mca}\;.$$

Hastigheten til partikkelen i x-retningen, målt i meter pr. sekund, er derfor

$$v_x = a\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{p_x}{ma}\,\frac{mca}{\sqrt{m^2c^2a^2+p^2}} = \frac{cp_x}{\sqrt{m^2c^2a^2+p^2}}\;.$$

Tilsvarende er

$$v_y = a\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{cp_y}{\sqrt{m^2c^2a^2+p^2}}\;,$$

og

$$v_z = a\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{cp_z}{\sqrt{m^2c^2a^2+p^2}}\;.$$

Alle hastighetskomponentene v_x, v_y og v_z går mot null som $1/a$ når $a\to\infty$.
La oss si at $t = t_0$ er «nå», at posisjonen til partikkelen nå er gitt ved koordinatene

(x_0, y_0, z_0), og at posisjonen til partikkelen ved et senere tidspunkt $t = t_1$ er gitt ved koordinatene (x_1, y_1, z_1). Størrelsen

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \, \frac{cp}{a\sqrt{m^2c^2a^2 + p^2}}\end{aligned}$$

vil vi kalle *koordinatavstanden* mellom posisjonene (x_0, y_0, z_0) og (x_1, y_1, z_1).
Den *fysiske* avstanden ved tiden t er noe annet, den er $\ell = a(t)\,\lambda$.
Det er opplagt at λ øker etter som tiden går (forutsatt at partikkelen ikke ligger i ro hele tiden), derfor må den fysiske avstanden ℓ som partikkelen beveger seg, bli uendelig stor i grensen $t_1 \to \infty$, under den forutsetningen at $a(t) \to \infty$ for $t \to \infty$. Men det er mindre opplagt at koordinatavstanden λ som den beveger seg, blir uendelig stor. Det avhenger nemlig av om integralet ovenfor divergerer eller ikke når den øvre integrasjonsgrensen t_1 går mot uendelig. Vi ser at

$$\frac{cp}{a\sqrt{m^2c^2a^2 + p^2}} \to \frac{p}{ma^2}$$

når $a \to \infty$, så spørsmålet er om integralet av $1/a^2$ er uendelig eller endelig.
For et strålingsdominert univers, med tilstandsligningen $P = (1/3)\rho c^2$, der P er trykket og ρc^2 er energitettheten, vil $a(t)$ gå som $t^{1/2}$. I dette tilfellet er integralet divergent, det divergerer som $\ln t$ når $t \to \infty$, og partikkelen vil bevege seg en uendelig koordinatavstand over uendelig lang tid.
For et materiedominert univers, med tilstandsligningen $P = 0$, vil $a(t)$ gå som $t^{2/3}$. Da er integralet konvergent, og partikkelen vil bevege seg en endelig koordinatavstand over uendelig lang tid.
For et univers dominert av det som kalles mørk energi, med tilstandsligningen $P = -\rho c^2$, vil $a(t)$ øke eksponensielt med t. Da er integralet enda mer konvergent, slik at partikkelen vil bevege seg en endelig koordinatavstand.

3e) Hvordan ser Maxwells ligninger ut, for et fritt elektromagnetisk felt (uten kilder), i FRW-metrikken med $k = 0$?
Du kan sette inn FRW-metrikken enten direkte i ligning (2), eller i Lagrange-tettheten i ligning (1).

Oppgavestilleren innrømmer gjerne at denne oppgaven ikke var presist nok formulert.
Den kan derfor besvares på mange måter, med mye eller lite arbeid.
Her er bare en (eller to) av de måtene.
Den metriske tensoren ser slik ut, i koordinatene $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Den inverse matrisen er

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{pmatrix} .$$

Determinanten av $g_{\mu\nu}$ er $g = -a^6$, og $\sqrt{|g|} = a^3$, slik at Maxwells ligninger

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu}\right) = 0$$

får formen

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,(a^3 F^{\mu\nu}) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(a^3 F^{\mu 0}) + \frac{\partial}{\partial x}\,(a^3 F^{\mu 1}) + \frac{\partial}{\partial y}\,(a^3 F^{\mu 2}) + \frac{\partial}{\partial z}\,(a^3 F^{\mu 3}) = 0\ .$$

Videre er, for $j, k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} F^{0j} &= -F^{j0} = g^{0\alpha}\, g^{j\beta}\, F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2}\, F_{0j} = \frac{1}{a^2}\, F_{j0}\ , \\ F^{jk} &= -F^{kj} = g^{j\alpha}\, g^{k\beta}\, F_{\alpha\beta} = \frac{1}{a^4}\, F_{jk} = -\frac{1}{a^4}\, F_{kj}\ . \end{aligned}$$

Maxwells ligning med $\mu = 0$ blir:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\,(aF_{01}) - \frac{\partial}{\partial y}\,(aF_{02}) - \frac{\partial}{\partial z}\,(aF_{03}) = 0\ ,$$

eller, siden $a = a(t)$ er uavhengig av x, y og z,

$$\frac{\partial}{\partial x}\, F_{01} + \frac{\partial}{\partial y}\, F_{02} + \frac{\partial}{\partial z}\, F_{03} = 0\ .$$

Maxwells ligninger med $\mu = j = 1, 2, 3$ blir:

$$-\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(aF_{j0}) + \frac{\partial}{\partial x}\,(a^{-1}F_{j1}) + \frac{\partial}{\partial y}\,(a^{-1}F_{j2}) + \frac{\partial}{\partial z}\,(a^{-1}F_{j3}) = 0\ ,$$

eller:

$$-\frac{a^2}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\, F_{j0} - \frac{a}{c}\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\, F_{j0} + \frac{\partial}{\partial x}\, F_{j1} + \frac{\partial}{\partial y}\, F_{j2} + \frac{\partial}{\partial z}\, F_{j3} = 0\ .$$

I polarkoordinatene $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ blir

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} .$$

Den inverse matrisen er da

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} .$$

Determinanten av $g_{\mu\nu}$ er $g = -a^6 r^4 \sin^2\theta$, og $\sqrt{|g|} = a^3 r^2 \sin\theta$, slik at Maxwells ligninger får formen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(a^3 r^2 \sin\theta\, F^{\mu\nu}\right) \;=\; & \frac{r^2 \sin\theta}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3 F^{\mu 0}\right) + a^3 \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F^{\mu 1}\right) \\ & + a^3 r^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, F^{\mu 2}\right) + a^3 r^2 \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F^{\mu 3}\right) = 0\ .\end{aligned}$$