SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 1

Strogatz, oppgave 2.2.9

Figuren tyder på at vi skal ha $f(1) = f(0) = 0$, mens $f(x) < 0$ for $0 < x < 1$, $f(x) > 0$ for $x > 1$ og for $x < 0$. En mulig løsning er kanskje

$$f(x) = x(x-1) \ .$$

Går vi litt nærmere inn på saken, ser vi at ligningen $\dot{x} = x(x-1)$ har løsningen

$$t - t_0 = \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \ln|x-1| - \ln|x| = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| \ ,$$

der t_0 er en integrasjonskonstant.

Det er to muligheter: enten er

$$\left|1 - \frac{1}{x}\right| = -\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^{t-t_0} \ ,$$

dvs. at

$$x(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{t-t_0}} \ .$$

Denne løsningen gir $0 < x(t) < 1$ for vilkårlige verdier av t og t_0. Med en passende valgt verdi av t_0 kan den ligne på en av de skisserte kurvene i figuren i oppgaven.

Eller så er

$$\left|1 - \frac{1}{x}\right| = 1 - \frac{1}{x} = \mathrm{e}^{t-t_0} \ ,$$

dvs. at

$$x(t) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{t-t_0}} \ .$$

Denne løsningen gir $x(t) < 0$ for $t > 0$ dersom $t_0 < 0$, det ligner på en annen av de skisserte kurvene. Og den gir $x(t) > 1$ for $0 < t < t_0$ dersom $t_0 > 0$, det kan ligne på en tredje av de skisserte kurvene.

Merk at den siste løsningen gir at $x(t) \to \infty$ eller $x(t) \to -\infty$ når $t \to t_0$, altså må vi velge t_0 utenfor det tidsintervallet som er skissert.

Er det mulig å velge $f(x)$ slik at vi unngår at $x(t)$ divergerer for en endelig verdi av t?

Strogatz, oppgave 2.3.4 (Allee-effekten)

a) Gitt ligningen

$$\frac{\dot{N}}{N} = r - a(N-b)^2 \ ,$$

der $N = N(t)$ er antallet organismer, mens r, a og b er konstanter. Høyresiden av ligningen er vekstraten for en gitt verdi av N. Det forutsettes at vekstraten er maksimal for mellomstore verdier av N, det betyr at vi må ha $a > 0$. I så fall er vekstraten maksimal for $N = b$, og vi må også rimeligvis forutsette at $b > 0$. Den maksimale vekstraten er r, og den bør være positiv, ellers vil arten raskt dø ut.

Konklusjon: vi bør forlange at $r > 0$, $a > 0$ og $b > 0$.

b) Ligningen kan også skrives

$$\dot{N} = N(r - a(N-b)^2) \; .$$

Fikspunktene er $N = 0$, $N = N_+$ og $N = N_-$, der

$$N_\pm = b \pm \sqrt{\frac{r}{a}} \; .$$

Ligningen kan derfor skrive slik:

$$\dot{N} = -aN(N - N_-)(N - N_+) \; .$$

Vi har følgende tre tilfeller.

- $r < ab^2$: da er $0 < N_- < N_+$. Vi har at $\dot{N} > 0$ for $N < 0$ og $N_- < N < N_+$, mens $\dot{N} < 0$ for $0 < N < N_-$ og $N_+ < N$. Det betyr at 0 og N_+ begge er stabile fikspunkt, mens N_- er et ustabilt fikspunkt. For at arten skal overleve, må antallet N komme over terskelverdien N_-, ellers vil den dø ut.
- $r > ab^2$: da er $N_- < 0 < N_+$. Vi har at $\dot{N} > 0$ for $N < N_-$ og $0 < N < N_+$, mens $\dot{N} < 0$ for $N_- < N < 0$ og $N_+ < N$. Det betyr at N_- og N_+ begge er stabile fikspunkt, mens 0 er et ustabilt fikspunkt. Siden $N_- < 0$, er det naturligvis umulig at $N = N_-$. I dette tilfellet vil arten alltid overleve, i følge modellen.
- $r = ab^2$: da er $N_- = 0$. Vi har at $\dot{N} > 0$ for $N < 0$ og $0 < N < N_+$, mens $\dot{N} < 0$ for $N_+ < N$. Det betyr at N_+ er et stabilt fikspunkt, mens 0 er et halvstabilt fikspunkt: det er stabilt fra venstre ($N < 0$, som er ufysisk), men ustabilt fra høyre ($N > 0$).

Det som skjer ved $r = ab^2$ er et eksempel på en *transkritisk* bifurkasjon: to fikspunkt kolliderer og utveksler stabilitet.

c) Vi starter integrasjonen ved $t = 0$ med en gitt verdi $N(0)$.
Når $t \to \infty$ vil $N(t) \to N_+$, unntatt dersom $N_- > 0$ og dessuten $0 < N(0) < N_-$, for da vil $N(t) \to 0$.

d) Spesialtilfellet $r = ab^2$ gir ligningen

$$\frac{\dot{N}}{N} = ab^2 - a(N-b)^2 = aN(2b - N) \; ,$$

som har den samme kvalitative oppførselen for $N > 0$ som den logistiske modellen

$$\dot{N} = aN(2b - N) \; .$$

Å erstatte $\dot{N}/N = \mathrm{d}N/(N\mathrm{d}t)$ med $\dot{N} = \mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ i ligningen, er nemlig det samme som å forandre tidsskalaen (ved å erstatte $N\mathrm{d}t$ med $\mathrm{d}t$).
Den eneste kvalitative forskjellen mellom denne modellen og den logistiske modellen er det ustabile fikspunktet $N_- > 0$ som opptrer når $r < ab^2$.

Strogatz, oppgavene 2.4.2, 2.4.5 og 2.4.7

Gitt ligningen $\dot{x} = f(x)$. Fikspunktene er gitt av ligningen $f(x) = 0$.
Lineær stabilitetsanalyse sier at et fikspunkt x_* er stabilt hvis $f'(x_*) < 0$ og ustabilt hvis $f'(x_*) > 0$.
I tilfellet $f'(x_*) = 0$ er lineær stabilitetsanalyse utilstrekkelig (men vi kan eventuelt se på fortegnet til den første av de deriverte som ikke er null).

2.4.2 $f(x) = x(1-x)(2-x) = x(x-1)(x-2)$, $f'(x) = (x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)$.
Fikspunkt er $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$. Siden $f'(0) = 2$, $f'(1) = -1$ og $f'(2) = 2$, er $x = 0$ stabilt, mens $x = 0$ og $x = 2$ er ustabile.

2.4.5 $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$, $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
Eneste fikspunkt er $x = 0$. Siden $f'(0) = 0$, må vi bruke en annen metode enn lineær stabilitetsanalyse. Vi har at $f(x) > 0$ for alle (reelle) $x \neq 0$. Det viser at fikspunktet er halvstabilt: stabilt fra venstre ($x < 0$) men ustabilt fra høyre ($x > 0$).

2.4.7 $f(x) = ax - x^3$, $f'(x) = a - 3x^2$.
Uansett verdien av a, er $x = 0$ et fikspunkt. Siden $f'(0) = a$, er $x = 0$ et stabilt fikspunkt for $a < 0$, men ustabilt for $a > 0$. For $a = 0$ er $x = 0$ også et stabilt fikspunkt, fordi da er $f(x) = -x^3$ positiv for $x < 0$, negativ for $x > 0$.
Dersom $a > 0$ finnes det to andre fikspunkt, nemlig $x = \pm\sqrt{a}$. Begge er stabile, fordi $f'(\pm\sqrt{a}) = -2a < 0$.
Det som skjer ved $a = 0$ er prototypen på en høygaffelbifurkasjon.

Strogatz, oppgave 2.5.6

a) Volumet $a|v|\,\mathrm{d}t$ strømmer gjennom hullet i et infinitesimalt tidsintervall $\mathrm{d}t$, samtidig som vannvolumet i bøtta reduseres med $A|\dot{h}|\,\mathrm{d}t$.
Siden det totale volumet av vannet er konstant, må $a|v|\,\mathrm{d}t = A|\dot{h}|\,\mathrm{d}t$, dvs. at $a|v| = A|\dot{h}|$.
Regner vi f.eks. positiv retning oppover, har vi at $v < 0$ og $\dot{h} < 0$, slik at $av = A\dot{h}$.

b) Tar vi bort et vannlag øverst med tykkelse Δh, så har dette vannet et volum $A\,\Delta h$ og en masse $\rho A\,\Delta h$.
Den kinetiske energien til samme mengde vann idet det strømmer ut gjennom hullet i bunnen av bøtta, er $(1/2)(\rho A\,\Delta h)v^2$.
Vi vil nå sammenligne denne kinetiske energien med den potensielle energien til vannet i forhold til $h = 0$ (som er bunnen av bøtta). Ved å fjerne vannlaget øverst reduserer vi den totale potensielle energien av vannet i bøtta med $(\rho A\,\Delta h)gh$, der g er tyngdens akselerasjon.
Dersom vi ser bort fra friksjon og antar at all den potensielle energien som fjernes, gjøres om til kinetisk energi, gir det ligningen $v^2 = 2gh$.

c) Med $\dot{h} < 0$ har vi i følge de to ligningene at

$$\dot{h} = \frac{a}{A}\,v = -\frac{a}{A}\,\sqrt{2gh} = -C\,\sqrt{h}\ ,$$

med $C = a\sqrt{2g}/A$.

d) Ligningen kan omskrives til:

$$-C\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}\ .$$

Integrert gir det, med en vilkårlig integrasjonskonstant t_0, at

$$-C(t - t_0) = 2\sqrt{h}\ .$$

Altså,

$$h(t) = \frac{C^2}{4}\,(t - t_0)^2 = \frac{ga^2}{2A^2}\,(t - t_0)^2\ .$$

Men ligningen $\dot{h} = -C\,\sqrt{h}$, der $C > 0$, impliserer at $\dot{h} \leq 0$. Derfor må vi skjøte sammen to forskjellige løsninger til en løsning:

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{ga^2}{2A^2}\,(t - t_0)^2 & \text{for} \quad t \leq t_0\ , \\ 0 & \text{for} \quad t \geq t_0\ . \end{cases}$$

Strogatz, oppgave 2.6.1

Den harmoniske oscillatoren $m\ddot{x} = -kx$ er et todimensjonalt system i den terminologien vi bruker. Vi må innføre en ny variabel, f.eks. impulsen $p = mx$, slik at vi får to førsteordens ligninger: $\dot{x} = p/m$, $\dot{p} = -kx$.