# SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 3

## Strogatz, oppgave 5.1.9

c) Bevegelsesligningen er lineær, av formen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

har den karakteristiske ligningen (egenverdiligningen)

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \; ,$$

med røtter $\lambda = \pm 1$. Det viser at origo er et sadelpunkt, med en stabil retning, som er egenvektoren med egenverdi $-1$, og en ustabil retning, som er egenvektoren med egenverdi 1. Egenverdiligningen

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

med egenverdien $\lambda = -1$ gir den stabile retningen, som er egenvektoren

$$\mathbf{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

mens den samme egenverdiligningen med egenverdien $\lambda = 1$ gir den ustabile retningen, som er egenvektoren

$$\mathbf{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Den stabile mangfoldigheten til fikspunktet i origo er den spesielle løsningen som konvergerer mot origo når $t \to \infty$ , nemlig

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C\mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{u}_- = C\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Den er entydig opp til en integrasjonskonstant $C$. En annen måte å si det samme på, er at den stabile mangfoldigheten er gitt av ligningen $x = y$.

Den ustabile mangfoldigheten er den spesielle løsningen som konvergerer mot origo når $t \to -\infty$ , nemlig

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = D\mathrm{e}^{t}\,\mathbf{u}_+ = D\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Den er også entydig opp til en integrasjonskonstant $D$. En alternativ måte å uttrykke seg på, er at den ustabile mangfoldigheten er gitt av ligningen $x = -y$.

d) Vi har at

$$\dot{u} = \dot{x} + \dot{y} = -y - x = -u \;, \qquad \dot{v} = \dot{x} - \dot{y} = -y + x = v \;.$$

Løsningen med $u(0) = u_0$ og $v(0) = v_0$ er $u(t) = u_0 \mathrm{e}^{-t}$, $v(t) = v_0 \mathrm{e}^{t}$.

e) Den stabile mangfoldigheten er gitt av ligningen $v = 0$, den ustabile mangfoldigheten er $u = 0$.

f) Vi har at $u_0 = x_0 + y_0$ og $v_0 = x_0 - y_0$. Det gir at

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(u(t) + v(t)) = \frac{1}{2}((x_0 + y_0)\mathrm{e}^{-t} + (x_0 - y_0)\mathrm{e}^{t}) = x_0 \cosh t - y_0 \sinh t \;, \\ y(t) &= \frac{1}{2}(u(t) - v(t)) = \frac{1}{2}((x_0 + y_0)\mathrm{e}^{-t} - (x_0 - y_0)\mathrm{e}^{t}) = y_0 \cosh t - x_0 \sinh t \;. \end{aligned}$$

Det er lett å verifisere at dette er en mulig løsning av ligningene $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = -x$ med startverdier $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Siden det finnes bare en løsning, i følge entydighetsteoremet, er dette selve Løsningen, med stor L.

## Strogatz, oppgave 5.2.2

Bevegelsesligningen har formen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Den karakteristiske ligningen er

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 \;,$$

og den gir egenverdiene $\lambda = \lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ og $\lambda = \lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$. Origo er en ustabil spiral (et ustabilt fokus). Egenverdiligningen

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

med $\lambda = \lambda_1$ eller $\lambda = \lambda_2$ gir de to egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Den generelle løsningen av bevegelsesligningen er

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^{t}(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) \\ \mathrm{e}^{t}(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) \end{pmatrix} .$$

Her er $c_1$ og $c_2$ konstante koeffisienter, som f.eks. kan bestemmes ved at vi har gitt et startpunkt ved $t = 0$,

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i}(c_1 - c_2) \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

Det gir at

$$c_1 = \frac{y_0 - \mathrm{i}x_0}{2}\ , \qquad c_2 = \frac{y_0 + \mathrm{i}x_0}{2}\ .$$

Når vi dessuten bruker at $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, får vi at

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^t((c_1 - c_2)\cos t + \mathrm{i}(c_1 + c_2)\sin t) \\ \mathrm{e}^t((c_1 + c_2)\cos t + \mathrm{i}(c_1 - c_2)\sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(x_0\cos t - y_0\sin t) \\ \mathrm{e}^t(y_0\cos t + x_0\sin t) \end{pmatrix}.$$

Eller, om vi vil,

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Denne metoden er rett fram, men en smule omstendelig, i og med at vi må beregne egenvektorene. Her er en metode som gir svaret uten at vi trenger egenvektorene eksplisitt. Ligningen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

med $A$ konstant har løsningen

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\,\mathbf{x}(0)\ ,$$

der eksponensialfunksjonen har den vanlige rekkeutviklingen,

$$\mathrm{e}^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}\,(tA)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,(tA)^n + \cdots\ .$$

Problemet reduserer seg altså til å summere denne rekken. Da kan vi bruke et matematisk teorem som sier at enhver matrise $A$ er rot i sitt eget karakteristiske polynom. Vi fant at det karakteristiske polynomet for matrisen $A$ var $(1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, dvs. at $A$ oppfyller ligningen $A^2 - 2A + 2I = 0$, der $I$ er enhetsmatrisen. Dvs. at

$$A^2 = 2A - 2I\ .$$

Av denne ligningen følger at

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = A(2A - 2I) = 2A^2 - 2A = 2(2A - 2I) - 2A = 2A - 4I\ . \\ A^4 &= AA^3 = A(2A - 4I) = 2A^2 - 4A = 2(2A - 2I) - 4A = -4I\ . \end{aligned}$$

Og så videre. Om vi ville, kunne vi bruke disse relasjonene rett fram til å summere rekken for $\mathrm{e}^{tA}$. Men vi kan i stedet foreta en liten omgående manøver. Vi innser at det svaret som vi ender opp med, har formen

$$\mathrm{e}^{tA} = f(t)I + g(t)A\ ,$$

der $f(t)$ og $g(t)$ er to funksjoner av $t$ som må bestemmes. Dessuten innser vi at hvis $\lambda$ er en egenverdi, så er $\lambda^2 = 2\lambda - 2$, og denne relasjonen gir at

$$\mathrm{e}^{t\lambda} = f(t) + g(t)\lambda\ ,$$

med de samme funksjonene $f(t)$ og $g(t)$. Siden egenverdiene er $\lambda = 1 \pm \mathrm{i}$, har vi at

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})} &= f(t) + g(t)(1+\mathrm{i})\ , \\ \mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i})} &= f(t) + g(t)(1-\mathrm{i})\ . \end{aligned}$$

Det gir at

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^t \sin t \,, \\
f(t) + g(t) &= \frac{\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})} + \mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i})}}{2} = \mathrm{e}^t \cos t \,.
\end{aligned}
$$

Og til slutt:

$$
\mathrm{e}^{tA} = f(t)I + g(t)A = (f(t)+g(t))I + g(t)(A-I) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} .
$$

## Strogatz, oppgave 5.2.13

Vi kan f.eks. innføre impulsen $p = m\dot{x}$, det gir ligningene

$$
\dot{x} = \frac{p}{m} \,, \qquad \dot{p} = -\frac{bp}{m} - kx \,.
$$

Et spørsmål litt på siden: finnes det en Hamilton-funksjon $H$ slik at

$$
\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \ ?
$$

I så fall må vi ha at

$$
0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{m}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{bp}{m} + kx\right) = -\frac{b}{m} \,.
$$

Vi ser at vi må ha $b = 0$, altså ingen dempning. Men merkelig nok er det likevel alltid mulig å finne en Hamiltonfunksjon, dersom vi godtar at den er eksplisitt tidsavhengig. Dersom vi multipliserer bevegelsesligningen med $\mathrm{e}^{\alpha t}$, der $\alpha = b/m$, kan vi omskrive den slik:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\, m\dot{x}\right) + \mathrm{e}^{\alpha t}\, kx = 0 \,.
$$

Så definerer vi $p = \mathrm{e}^{\alpha t}\, m\dot{x}$ og

$$
H = \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \frac{p^2}{2m} + \mathrm{e}^{\alpha t}\, \frac{kx^2}{2} \,.
$$

Tilbake til vårt lineære ligningsystem

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \qquad \text{med} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} .
$$

Summen av egenverdiene til matrisen $A$ er

$$
\tau = \mathrm{Tr}\, A = -\frac{b}{m} < 0 \,,
$$

og produktet er

$$
\Delta = \det A = \frac{k}{m} > 0 \,.
$$

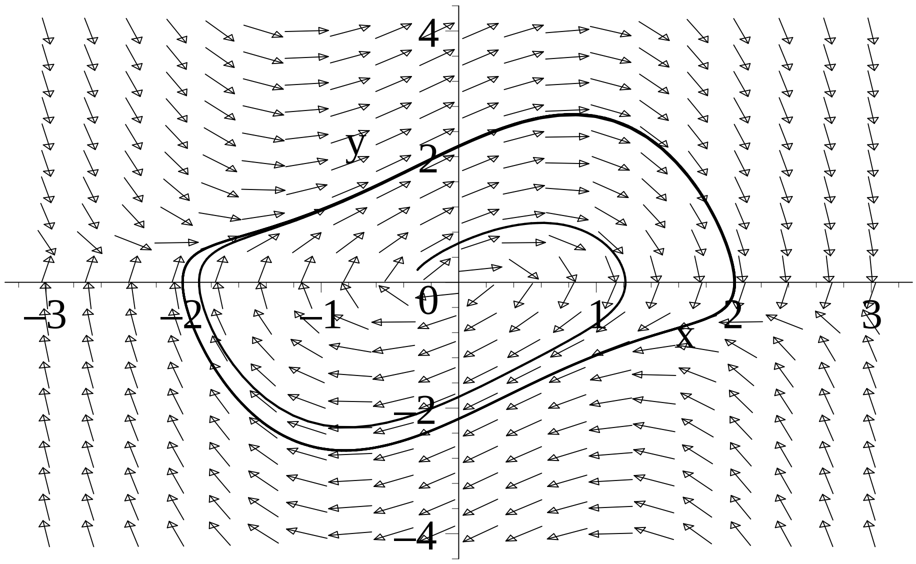
Begge egenverdiene er følgelig negative, og origo er alltid stabilt. Det er et stabilt knutepunkt dersom egenverdiene er reelle, dvs. dersom

$$\tau^2 - 4\Delta = \frac{b^2 - 4km}{m^2} \geq 0 \;, \qquad \text{dvs. at} \qquad b \geq 2\sqrt{km} \;.$$

Dette er det tilfellet som kalles overdempning: dempningen er så stor at oscillatoren ikke oscillerer en eneste gang. Grensetilfellet $b = 2\sqrt{km}$ kalles kritisk dempning.

I det motsatte tilfellet, $b < 2\sqrt{km}$, er origo et stabilt fokus (en stabil spiral), det betyr at dempningen er liten nok til at oscillatoren svinger fram og tilbake med en eksponensielt avtagende amplitude.

## Strogatz, oppgave 6.1.8




Figur 1: Faseportrett av van der Pol-oscillatoren.

Dette faseportrettet er generert med følgende kommandoer i Maple.

```
> with(DEtools):

> DEplot(
> [diff(x(t),t)=y(t)
> ,diff(y(t),t)=-x(t)+y(t)*(1-x(t)^2)]
> ,[x(t),y(t)]
> ,t=0..50
> ,x=-3..3
> ,y=-4..4
> ,[[x(0)=-0.3,y(0)=0.2]]
> ,stepsize=0.05
> ,arrows=medium
> ,linecolor=black
> ,color=black
> ,axesfont=[TIMES,ROMAN,18]
> ,labelfont=[TIMES,ROMAN,18]
> );
```

## Strogatz, oppgave 6.1.10

Prøv selv!

## Strogatz, oppgave 6.1.13

Enhver lukket bane har indeks 1, og må derfor gå rundt minst ett fikspunkt. Det ene fikspunktet må altså ligge innenfor alle de tre lukkede banene. To baner som er løsninger av den samme bevegelsesligningen, kan ikke skjære hverandre. Omkring fikspunktet går altså en bane innerst, en annen bane ytterst og den tredje banen mellom de to.

Kan vi si noe om omløpsretningene, må f.eks. alle de tre lukkede banene ha samme omløpsretning?