SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 4

Strogatz, oppgave 6.3.16

Gitt bevegelsesligningene

$$\dot{x} = a + x^2 - xy \equiv f(x,y) \ , \qquad \dot{y} = y^2 - x^2 - 1 \equiv g(x,y) \ .$$

Jacobi-matrisen til systemet er

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ -2x & 2y \end{pmatrix} .$$

a) Anta først at $a = 0$. Da er $\dot{x} = 0$ for $x = 0$ og for $x = y$, mens $\dot{y} = 0$ for $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$. Det finnes to fikspunkt, nemlig $(x, y) = (0, 1)$ og $(0, -1)$. Jacobimatrisen i fikspunktene er

$$A = \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} .$$

Summen av egenverdiene er $\tau = \mathrm{Tr}\, A = \pm 1$, og produktet av dem er $\Delta = \det A = -2$. Begge fikspunktene er sadelpunkt, fordi Jacobi-matrisen har en positiv og en negativ egenverdi. Det finnes en heteroklin bane (fra det ene sadelpunktet til det andre) med $x = 0$ og med

$$\dot{y} = y^2 - 1 \ .$$

Ligningen for y kan vi løse eksplisitt ved å separere variable, vi skriver

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = \frac{\mathrm{d}y}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) ,$$

og med en integrasjonskonstant t_0 har vi at

$$2(t - t_0) = \ln|y - 1| - \ln|y + 1| \ .$$

Vi kan gjerne velge $t_0 = 0$. For den løsningen vi er ute etter, er $-1 < y < 1$, slik at

$$\mathrm{e}^{2t} = \frac{1 - y}{1 + y} \ ,$$

eller omvendt,

$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^{2t}} = \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{t}} = -\tanh t \ .$$

b) Anta så at $a \neq 0$. Da gir $x = 0$ at $\dot{x} = a \neq 0$. For å få $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = 0$ må vi ha at

$$y = x + \frac{a}{x} = \pm\sqrt{1 + x^2} \ .$$

Dette gir en ligning for x, og kvadrering av den gir at

$$x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2} = 1 + x^2 \ ,$$

med løsninger

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{1-2a}}\;, \qquad y = x + \frac{a}{x} = \pm\left(\frac{a}{\sqrt{1-2a}} + \sqrt{1-2a}\right) = \pm\frac{1-a}{\sqrt{1-2a}}\;.$$

For at disse løsningene skal være reelle, må vi ha $a < 1/2$. Merk: det er to løsninger, ikke fire, løsningene er nemlig

$$x = \frac{a}{\sqrt{1-2a}}\;, \qquad y = \frac{1-a}{\sqrt{1-2a}}$$

og

$$x = -\frac{a}{\sqrt{1-2a}}\;, \qquad y = -\frac{1-a}{\sqrt{1-2a}}\;.$$

Prøv selv følgende lille Maple-program for å lage faseportrett:

```
>  with(DEtools):

>  a := 0.3:
>  DEplot(
>  [diff(x(t),t)=a+x(t)^2-x(t)*y(t)
>  ,diff(y(t),t)=y(t)^2-x(t)^2-1]
>  ,[x(t),y(t)],t=0..4,x=-2..2,y=-3..3
>  ,[[x(0)=-1.0,y(0)=0.8]],stepsize=0.05);
```

Strogatz, oppgave 6.4.7 (laser med to moder)

For å forenkle notasjonen en smule kan vi definere $\kappa_1 = k_1/G_1$ og $\kappa_2 = k_2/G_2$. Husk at k_1 og k_2 er dempningsparametre, det samme kan vi da si om κ_1 og κ_2.
Bevegelsesligningene har formen

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= G_1(N_0 - \alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2 - \kappa_1)n_1\;, \\ \dot{n}_2 &= G_2(N_0 - \alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2 - \kappa_2)n_2\;, \end{aligned}$$

og Jacobi-matrisen er

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{n}_1}{\partial n_1} & \frac{\partial \dot{n}_1}{\partial n_2} \\ \frac{\partial \dot{n}_2}{\partial n_1} & \frac{\partial \dot{n}_2}{\partial n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(N_0 - 2\alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2 - \kappa_1) & -G_1\alpha_2 n_1 \\ -G_2\alpha_1 n_2 & G_2(N_0 - \alpha_1 n_1 - 2\alpha_2 n_2 - \kappa_2) \end{pmatrix}.$$

a) Stabilitet av fikspunktet $n_1 = n_2 = 0$. Linearisering her består rett og slett i å stryke alle ledd som er kvadratiske i n_1 og n_2, dvs. alle ledd med α_1 og α_2. Det gir ligningene

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= G_1(N_0 - \kappa_1)n_1\;, \\ \dot{n}_2 &= G_2(N_0 - \kappa_2)n_2\;. \end{aligned}$$

De to modene er ikke koplet i disse linariserte ligningene. Den første moden er stabil for $N_0 < \kappa_1$ og den andre moden er stabil for $N_0 < \kappa_2$.

b) De andre fikspunktene er som følger. En mulighet, tilfelle (i), er $n_1 = 0$ og

$$N_0 - \alpha_2 n_2 - \kappa_2 = 0\;,$$

dvs.

$$n_1 = 0 \ , \qquad n_2 = \frac{N_0 - \kappa_2}{\alpha_2} \ .$$

Vi må forutsette at $N_0 > \kappa_2$, og da er mode 2 ustabil i fikspunktet $n_1 = n_2 = 0$.
Tilsvarende kan vi ha, som tilfelle (ii),

$$n_2 = 0 \ , \qquad n_1 = \frac{N_0 - \kappa_1}{\alpha_1} \ .$$

Eksistensen av dette fikspunktet forutsetter at $N_0 > \kappa_1$, hvilket betyr at mode 1 er ustabil i fikspunktet $n_1 = n_2 = 0$.
Den siste muligheten, tilfelle (iii), er at $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ og

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = N_0 - \kappa \ .$$

Denne ligningen definerer en rett linje i (n_1, n_2)-planet der hvert punkt er et fikspunkt. Vi må her forutsette at $N_0 - \kappa > 0$, og dermed er begge modene er ustabile i fikspunktet $n_1 = n_2 = 0$.
Jacobi-matrisen i fikspunktet er i tilfelle (i)

$$A = \begin{pmatrix} G_1(\kappa_2 - \kappa_1) & 0 \\ -G_2\alpha_1 n_2 & -G_2\alpha_2 n_2 \end{pmatrix} ,$$

i tilfelle (ii)

$$A = \begin{pmatrix} -G_1\alpha_1 n_1 & -G_1\alpha_2 n_1 \\ 0 & G_2(\kappa_1 - \kappa_2) \end{pmatrix} ,$$

og i tilfelle (iii)

$$A = \begin{pmatrix} -G_1\alpha_1 n_1 & -G_1\alpha_2 n_1 \\ -G_2\alpha_1 n_2 & -G_2\alpha_2 n_2 \end{pmatrix} .$$

I tilfellene (i) og (ii) er egenverdiene lik diagonalelementene i matrisen.
Det kan tenkes at bare det ene av disse to fikspunktene eksisterer, vi kan f.eks. ha at $\kappa_2 < N_0 < \kappa_1$, slik at bare fikspunkt (i) eksisterer. I så fall er dette fikspunktet stabilt, idet begge egenverdiene $G_1(\kappa_2 - \kappa_1)$ og $-G_2\alpha_1 n_2$ er negative.
Tilsvarende, dersom $\kappa_1 < N_0 < \kappa_2$, eksisterer fikspunkt (ii) og er stabilt, mens fikspunkt (i) ikke eksisterer.
Det kan også tenkes at begge fikspunktene (i) og (ii) eksisterer, dvs. at $\kappa_1 < N_0$ og $\kappa_2 < N_0$. I så fall er (i) stabilt og (ii) ustabilt dersom $\kappa_2 < \kappa_1 < N_0$, og omvendt er (ii) stabilt og (i) ustabilt dersom $\kappa_1 < \kappa_2 < N_0$.
Tilfelle (iii) forutsetter at $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa < N_0$, slik at begge modene er ustabile i fikspunktet $n_1 = n_2 = 0$. Siden summen av egenverdiene til matrisen A er

$$\tau = \operatorname{Tr} A = -(G_1\alpha_1 n_1 + G_2\alpha_2 n_2) < 0 \ ,$$

og produktet av egenverdiene er

$$\Delta = \det A = 0 \ ,$$

så er den ene egenverdien negativ og den andre lik 0. Hvert punkt på den rette linjen $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = N_0 - \kappa$ er da et stabilt fikspunkt, i den forstand at vi alltid vil få konvergens mot ett eller annet punkt på linjen. Sett fra et annet synspunkt er disse fikspunktene marginalt stabile, idet retningen langs linjen er en egenvektor med egenverdi 0, vi har hverken konvergens eller divergens i retning langs denne linjen.

c) Vi ser at systemet har nøyaktig ett stabilt fikspunkt, med unntak av det spesielle tilfellet $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa < N_0$, der det finnes en rett linje som består av stabile fikspunkt.
Vi finner følgende kvalitativt forskjellige faseportrett i det fysiske området med $n_1 \geq 0$ og $n_2 \geq 0$.

- Ett fikspunkt: $n_1 = n_2 = 0$, som er stabilt.
- To fikspunkt: $n_1 = n_2 = 0$, som er ustabilt; og $n_1 = 0$, $n_2 > 0$, som er stabilt.
- To fikspunkt: $n_1 = n_2 = 0$, som er ustabilt; og $n_1 > 0$, $n_2 = 0$, som er stabilt.
- Tre fikspunkt: $n_1 = n_2 = 0$, som er ustabilt; $n_1 > 0$, $n_2 = 0$; $n_1 > 0$, $n_2 = 0$. Ett av de to siste er ustabilt og ett er stabilt.
- Ett isolert fikspunkt: $n_1 = n_2 = 0$, som er ustabilt; dessuten uendelig mange stabile fikspunkt (strengt tatt marginalt stabile) som ligger på en rett linje.

Strogatz, oppgave 6.5.5

Gitt bevegelsesligningen

$$\ddot{x} = (x - a)(x^2 - a) = x^3 - ax^2 - ax + a^2 = -\frac{\partial V}{\partial x} \,,$$

med

$$V = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - a^2 x \,.$$

Hvis $a \leq 0$, finnes det ett fikspunkt, nemlig $x = a$.
Hvis $a > 0$, finnes det tre fikspunkt, nemlig $x = a$ og $x = \pm\sqrt{a}$. Unntaket er når $a = 1$, da finnes det to fikspunkt $x = \pm 1$.

Vi kan kjøre fram standardmaskineriet for å analysere ligningen: gjøre om til to førsteordens ligninger, finne fikspunktene og linearisere omkring dem.

Eller vi kan tenke på dette systemet som en partikkel på en linje i potensialet $V = V(x)$. Siden $V \to -\infty$ når $|x| \to \infty$, vil enten $x(t) \to \infty$ eller $x(t) \to -\infty$ for $t \to \infty$, unntatt dersom partikkelen er fanget nær et lokalt minimum av V.
Fikspunktet $x = -\sqrt{a}$ er et lokalt maksimum for V, derfor er det ustabilt.
Hvis $0 < a < 1$, så er $0 < a < \sqrt{a}$. Da er fikspunktet $x = a$ et lokalt minimum for V, og følgelig stabilt, mens fikspunktet $x = \sqrt{a}$ er et lokalt maksimum for V, følgelig ustabilt.
Hvis $1 < a$, så er rollene byttet om mellom a og $\sqrt{a}$, idet $0 < \sqrt{a} < a$.

Strogatz, oppgave 6.5.7

Den eksakte rotasjonssymmetriske løsningen av Einsteins ligning for gravitasjonsfeltet ble funnet av Schwarzscild i 1916 og er oppkalt etter ham. Bevegelsesligningen for en liten punktpartikkel (en planet!) i dette gravitasjonsfeltet har den oppgitte formen,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta} + u = \alpha + \epsilon u^2 \,.$$

Å utlede denne ligningen ville føre for langt her, men vi kan repetere utledningen av den tilsvarende ikke-relativistiske bevegelsesligningen.

La M være solmassen og m planetmassen. Fordi $M >> m$, er det en god tilnærming å anta at Sola ikke beveger seg. I Einsteins teori, den generelle relativitetsteorien, er en slik forenkling nødvendig, men i Newtons teori, det ikke-relativistiske tilfellet, kan to-partikkelproblemet løses eksakt uten denne antagelsen. Vi velger origo for koordinatsystemet i sentrum av Sola, og planetposisjonen betegner vi med $\boldsymbol{r}$. Fordi gravitasjonskraften

$$\boldsymbol{K} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} ,$$

der G er Newtons gravitasjonskonstant, er rettet langs radiusvektoren $\boldsymbol{r}$, er dreieimpulsen $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ en bevegelseskonstant. Her er $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ impulsen til planeten. At $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$, følger av Newtons andre lov,

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{K} .$$

Vi har nemlig at

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = 0 + 0 = 0 .$$

Av Newtons andre lov følger også at energien

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{GMm}{r}$$

er bevart.

Ligningen $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{r} = 0$ er en identitet, den sier at dreieimpulsen alltid er vinkelrett på $\boldsymbol{r}$, og siden $\boldsymbol{L}$ er konstant, følger det at planeten beveger seg i et plan vinkelrett på $\boldsymbol{L}$. Vi innfører polarkoordinater (r, θ) i dette planet, slik at de Kartesiske koordinatene (x, y) er $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Det gir at komponenten av dreieimpulsen vinkelrett på baneplanet er

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(r\cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) - r\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)) = mr^2\dot{\theta} ,$$

og at

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} .$$

Både L_z og E er bevegelseskontanter. Siden

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} ,$$

har vi at

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2\right) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{L_z}{mr^2}\right)^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2\right) - \frac{GMm}{r} . \end{aligned}$$

Eller ekvivalent,

$$\frac{2E}{mc^2} = \left(\frac{L_z}{mc}\right)^2\left(\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{2GM}{c^2 r} .$$

Her kan vi innføre Schwarzschild-radien til Sola,

$$R = \frac{2GM}{c^2} = 3,0 \text{ km} \ ,$$

og den dimensjonsløse variabelen

$$\psi = \frac{R}{r} = \frac{2GM}{c^2 r} \ .$$

Det gir ligningen

$$\frac{2E}{mc^2} = \left(\frac{L_z}{mcR}\right)^2 \left(\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \psi^2\right) - \psi \ .$$

Derivasjon av denne ligningen gir at

$$0 = \left(2\left(\frac{L_z}{mcR}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} + \psi\right) - 1\right) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta} \ .$$

Så sant $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\theta \neq 0$, gir dette ligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} + \psi = a \ ,$$

der a er konstant,

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{mcR}{L_z}\right)^2 \ .$$

Einsteins modifiserte bevegelsesligning er

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} + \psi = a + \frac{3}{2}\,\psi^2 \ .$$

For Jorda, som eksempel, er $r = 1,5 \times 10^8$ km $= 5 \times 10^7 R$, slik at $\psi = 2 \times 10^{-8}$. Hastigheten er $v = 30$ km/s $= 10^{-4}c$, og det gir at $L_z = rmv = 5 \times 10^3 mcR$, slik at også $a = 2 \times 10^{-8}$. Når $\psi << 1$, er det klart at $\psi^2 << \psi$. Hvis vi i stedet innfører en variabel $u = \psi/a \approx 1$, så gir det ligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 1 + \frac{3a}{2}\,u^2 \ .$$

Som er den ligningen Strogatz oppgir, med $\alpha = 1$ og med $\epsilon = 3a/2$ ($\epsilon \approx 3 \times 10^{-8}$ for Jorda).

På standard måte omskriver vi ligningen som to førsteordens ligninger,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = v \ , \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \alpha - u + \epsilon u^2 \ .$$

Vi har to fikspunkt, med $v = 0$ og $\alpha - u + \epsilon u^2 = 0$, dvs.

$$u = u_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon\alpha}}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}\left(1 \pm \left(1 - 2\epsilon\alpha - 2\epsilon^2\alpha^2 + \cdots\right)\right) .$$

Det interessante fikspunktet er $u_- \approx \alpha$. Det andre fikspunktet, $u - + \approx 1/\epsilon$, dvs. at $\psi = R/r \approx 2/3$, er lite interessant, i hvert fall når det gjelder solsystemet. Det gir $r \approx 3R/2 = 4,5$ km, dette er altså like utenfor Schwarzschild-radien, midt inne i Sola.

At $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = v = 0$, betyr at radien r er konstant, altså at planeten går i sirkelbane. Det vi har funnet ut nå, er at for en gitt verdi av dreieimpulsen L_z finnes det to mulige sirkelbaner, og i Jorda sitt tilfelle er den ene av de to banene like utenfor Schwarzschild-radien.

Linearisering om et fikspunkt (u, v) gir Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\epsilon u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm\sqrt{1 - 4\epsilon\alpha} & 0 \end{pmatrix} .$$

Summen av egenverdiene er $\tau = \operatorname{Tr} A = 0$ og produktet av dem er $\Delta = \det A = \mp\sqrt{1 - 4\epsilon\alpha}$.

For det uinteressante fikspunktet u_+ er $\Delta < 0$, der er den ene egenverdien positiv og den andre negativ, slik at dette er et sadelpunkt. Et ustabilt fikspunkt kan ikke realiseres fysisk.

For det interessante fikspunktet $u_- \approx \alpha$ er $\Delta > 0$, og siden $\tau = 0$, har vi der to rent imaginære egenverdier, hvilket er kjennetegnet på et lineært senter. Spørsmålet er så om dette fikspunktet, som er et senter i følge lineariseringen, er et senter også for den fullstendige ikkelineære bevegelsesligningen. En mulig metode for å bevise at det faktisk er et senter (et ikkelineært senter i Strogatz sin terminologi) er å vise at systemet er konservativt, gjerne ved å finne eksplisitt en bevegelseskonstant. Ligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \alpha + \epsilon u^2$$

kan integreres en gang etter at vi har multiplisert den med $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$. Det gir bevegelseskonstanten

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 - \alpha u - \frac{1}{3}\epsilon u^3 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 - \alpha u - \frac{1}{3}\epsilon u^3 .$$

Konklusjon: u_- er et senter (et ikkelineært senter). Godt er det, fordi det betyr at planetbanene er stabile, i hvert fall marginalt stabile, slik at små perturbasjoner av en bane ikke vokser over alle grenser.

Hva mer er å si? Jo, vi kan beregne frekvensen for oscillasjoner omkring det marginalt stabile fikspunktet u_-. De to egenverdiene til Jacobi-matrisen A i dette fikspunktet er nemlig $\pm\mathrm{i}\omega$, der ω er vinkelfrekvensen, og vi har altså at

$$(\mathrm{i}\omega)(-\mathrm{i}\omega) = \omega^2 = \Delta = \sqrt{1 - 4\epsilon\alpha} .$$

Det gir at

$$\omega = \sqrt[4]{1 - 4\epsilon\alpha} \approx 1 - \epsilon\alpha = 1 - \epsilon = 1 - \frac{3a}{2} .$$

Omsatt til fysiske realiteter betyr det at f.eks. vinkelen θ_1 mellom ett perihelpunkt til planeten (punkt der planeten er nærmest Sola), og det neste, er

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1 - \frac{3a}{2}} \approx 2\pi\left(1 + \frac{3a}{2}\right) = 2\pi + 3a\pi .$$

For Jorda er som sagt $a = 2 \times 10^{-8}$, slik at den vinkelen som perihelpunktet flytter seg for hvert omløp, er 3×10^{-8} av et fullt omløp. Denne effekten er ikke målbar (??) for Jorda. Men den er målbar for Merkur, som en liten effekt som blir igjen etter at innvirkningen fra de andre planetene, først og fremst Jupiter og Saturn, er trukket fra.

På 1850-tallet postulerte den franske astronomen Urbain Jean Joseph Leverrier en ny planet innenfor Merkur som skulle kunne forklare den observerte perihelbevegelsen til Merkur som ikke kunne forklares på annen måte. Leverrier har sammen med John Adams æren for å ha forutsagt posisjonen til Neptun ut fra små perturbasjoner i banen til Uranus, slik at Johann Gottfried Galle kunne oppdage Neptun i 1846.

Legen og amatørastronomen Edmond Modeste Lescarbault observerte en mørk flekk mot solskiven en gang i 1859, og foreslo at det kanskje kunne være den hypotetiske planeten innenfor Merkur. Leverrier annonserte straks at planeten var oppdaget, og den ble døpt Vulcan. Lescarbault, som var uskyldig i oppstyret som fulgte, fikk æreslegionen. Men dessverre for de to franskmennene har det vist seg at Vulcan ikke eksisterer, og Einstein laget i 1915 en ny gravitasjonsteori, den generelle relativitetsteorien, som ga en annen forklaring på Merkurs perihelbevegelse.

Strogatz, oppgave 6.5.19 (kaniner og rever)

a) Lotka–Volterras modell for rovdyr ("F" for "foxes") og byttedyr ("R" for "rabbits") har formen

$$\dot{R} = R(a - bF) \;, \qquad \dot{F} = F(-c + dR) \;,$$

med positive konstanter a, b, c, d. Vekstraten for kaninbestanden uten rever er a, i denne modellen er det revebestanden og ingenting annet som begrenser veksten av kaninbestanden. Vekstraten for revebestanden uten kaniner er $-c$, i følge denne modellen vil altså revene dø ut om det ikke finnes kaniner. Begge disse antagelsene er urealistiske. En antagelse i modellen er tydeligvis at antallet kaniner som spises i et lite tidsintervall er proporsjonalt med hvor ofte en rev og en kanin møtes, og denne møtefrekvensen er rimeligvis proporsjonal med produktet RF.

b) For å gå systematisk til verks med avdimensjonalisering setter vi

$$R = Ax \;, \qquad F = By \;, \qquad t = C\tau \;,$$

der x, y og τ skal være dimensjonsløse (R og F er allerede dimensjonsløse, siden de er antall), og A, B og C er konstante koeffisienter. Innsatt i ligningene gir det:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{C}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= Ax(a - bBy) = Aax\left(1 - \frac{bB}{a}\,y\right) \;, \\
\frac{B}{C}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= By(-c + dAx) = Bcy\left(\frac{dA}{c}\,x - 1\right) \;.
\end{aligned}$$

Vi ser at for at ligningene skal få den oppgitte formen, må vi velge

$$A = \frac{c}{d} \;, \qquad B = \frac{a}{b} \;, \qquad C = \frac{1}{a} = \frac{d}{c} \;.$$

Det gir ligningene

$$\begin{aligned}
x' &\equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = x(1 - y) \;, \\
y' &\equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \mu y(x - 1) \;,
\end{aligned}$$

med $\mu = Cc = d$.

c) De dimensjonsløse ligningene gir at

$$\frac{x'}{x} = (1-y)\ , \qquad \frac{y'}{y} = \mu(x-1)\ ,$$

og dermed

$$\mu(x-1)\frac{x'}{x} - (1-y)\frac{y'}{y} = 0\ .$$

Denne ligningen kan integreres, og gir, med en integrasjonskonstant D,

$$\mu(x - \ln x) - \ln y + y = D\ .$$

d) Modellen har to fikspunkt: $(x, y) = (0, 0)$ eller $(1, 1)$. Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ \mu y & \mu(x-1) \end{pmatrix}$$

er i fikspunktet $(0, 0)$ lik

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

og i fikspunktet $(1, 1)$ lik

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $(0, 0)$ er et sadelpunkt, med en negativ egenverdi $-\mu$ og en positiv egenverdi 1. Den stabile mangfoldigheten til fikspunktet er $x = 0$: uten kaniner dør revene ut. Den ustabile mangfoldigheten er $y = 0$: uten rever øker antallet kaniner eksponensielt, over alle grenser.

Det andre fikspunktet $(1, 1)$ er et senter i følge den lineariserte stabilitetsanalysen. Det er også et senter for de fulle ikkelineære bevegelsesligningene, fordi det altså finnes en bevegelseskonstant, slik at bevegelsen ikke kan spiralere utover fra eller innover mot dette fikspunktet. Hvilke som helst startverdier $R > 0$ og $F > 0$ må gi en periodisk løsning, det finnes rett og slett ingen andre muligheter. For eksempel kan ikke $R \to \infty$ eller $F \to \infty$, det viser bevegelseskonstanten D.