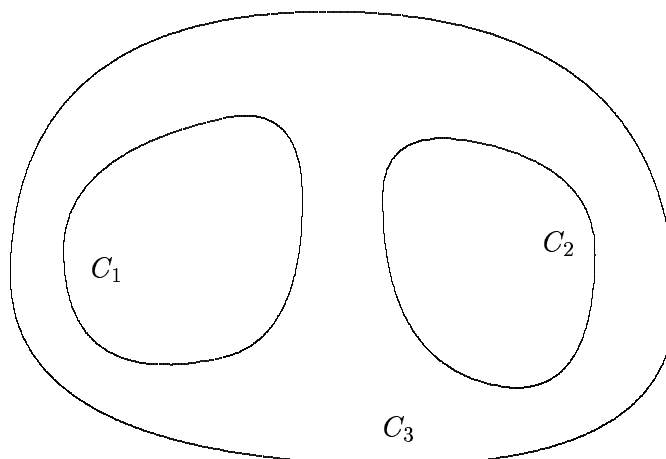


## SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 5

### Strogatz, oppgave 6.8.8

De tre kurvene må være plasert noe slik som dette:



Enhver lukket bane (periodisk løsning av bevegelsesligningen) i et todimensjonalt system har indeks  $+1$ . Denne indeksen er summen av indeksene til fikspunktene innenfor kurven, forutsatt at alle fikspunktene er isolerte. Siden indeksen til et isolert fikspunkt er enten  $+1$  (for et knutepunkt eller senter) eller  $-1$  (for et sadelpunkt), må det finnes et odde antall fikspunkt innenfor en lukket bane. Siden antallet fikspunkt innenfor den lukkede banen  $C_1$  er odde, og antallet fikspunkt innenfor  $C_2$  likeså er odde, og siden antallet fikspunkt totalt innenfor  $C_3$  er odde, må det finnes et odde antall fikspunkt som er innenfor  $C_3$  men utenfor både  $C_1$  og  $C_2$ . Vi kan faktisk si enda litt mer, for summen av indeksene til fikspunktene som er innenfor  $C_3$  og utenfor  $C_1$  og  $C_2$ , må være  $-1$ . Det må altså finnes minst ett sadelpunkt i dette området.

### Strogatz, oppgave 6.8.9

Her er et moteksempel, i polarkoordinater:

$$\dot{r} = r(r-1)(r-3), \quad \dot{\theta} = r-2.$$

### Strogatz, oppgave 6.8.11

Vi skriver

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta},$$

og den komplekskonjugerte av  $z$  er

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}.$$

Ligningen  $\dot{z} = z$  kan deles opp i en realdel:  $\dot{x} = x$  og en imaginærdel:  $\dot{y} = y$ . Dette vektorfeltet har ett fikspunkt, nemlig  $z = 0$ , dvs.  $x = y = 0$ , og indeksen til dette fikspunktet er  $+1$ . Fikspunktet er et ustabil knutepunkt, eller mer presist en ustabil stjerne.

Ligningen  $\dot{z} = \bar{z}$  kan også deles opp i en realdel:  $\dot{x} = x$  og en imaginærdel:  $\dot{y} = -y$ . Dette vektorfeltet har også ett fikspunkt,  $z = 0$ , med indeks  $-1$ . Fikspunktet er altså et sadelpunkt.

Ligningen  $\dot{z} = z^k$  definerer et vektorfelt som fremdeles har  $z = 0$  som sitt eneste fikspunkt. Indeksen til fikspunktet er  $k$ , det ser vi enklest i polarkoordinater:  $z^k = r^k e^{ik\theta}$ . Når vi går en gang rundt fikspunktet mot urviseren, vil det si at vi øker fasen  $\theta$  til det komplekse tallet  $z$  med  $2\pi$ . Da øker fasen til vektorfeltet  $z^k$  med  $k$  ganger  $2\pi$ .

Tilsvarende ser vi at ligningen  $\dot{z} = \bar{z}^k$  definerer et vektorfelt med  $z = 0$  som eneste fikspunkt, og indeksen til fikspunktet er  $-k$ . Det stemmer forøvrig med at

$$\bar{z}^k = \frac{(z\bar{z})^k}{z^k} = r^{2k} z^{-k}.$$

Et litt annet resonnement som også gir indeks  $k$  for origo som fikspunkt til vektorfeltet  $z^k$ , er å se på  $z^k$  som et grensetilfelle av et polynom

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_k)$$

som har  $k$  forskjellige nullpunkt  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Hvert nullpunkt har indeks  $+1$ , liksom nullpunktet til polynomet  $z$  har indeks  $+1$ . Enhver kurve  $C$  som går rundt alle de  $k$  nullpunktene  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , har følgelig indeks  $k$ . Om vi nå flytter kontinuerlig på nullpunktene, uten å flytte dem ut av kurven  $C$ , kan ikke det forandre indeksen til kurven. Selv om vi flytter alle nullpunktene sammen i origo, vil kurven  $C$  fremdeles måtte ha indeks  $k$ . I følge dette resonnementet er det naturlig å se på  $z = 0$  som et  $k$ -dobbel nullpunkt for  $z^k$ .

Ser vi på femtegradspolynomet  $z^5 + z^3 - 1$ , så kan det faktoriseres som  $z^5 + z^3 - 1 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)(z - a_5)$ , og hvert av nullpunktene  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  har indeks  $+1$ . Går vi f.eks. en gang rundt enhetssirkelen  $|z| = 1$ , mot urviseren, og måler indeksen, dvs. hvor mange ganger fasen til polynomet  $z^5 + z^3 - 1$  øker med  $2\pi$ , så gir dette direkte antallet nullpunkt til polynomet innenfor enhetssirkelen. Går vi rundt sirkelen  $|z| = 2$ , så finner vi antallet nullpunkt med  $|z| < 2$ . Og så videre.

Prøv følgende kommandoer i Maple! De lager en figur som viser at når  $z$  løper rundt enhetssirkelen en gang, så løper  $z^5 + z^3 - 1$  tre ganger rundt origo, dvs. at indeksen til enhetssirkelen er tre, og det finnes tre nullpunkt til polynomet innenfor enhetssirkelen. Prøv også andre verdier for  $r$ .

```
> r := 1; z := r*exp(I*theta); p := z^5+z^3-1;
> plot([Re(p),Im(p),theta=0..2*Pi],scaling=constrained);
```

Polynomet har en reell rot, som er  $0,837\,619\,775$ , og fire komplekse røtter:  $-0,636\,663\,107 \pm 0,664\,701\,565i$  med absoluttverdi  $0,920\,417\,341$ ; og  $0,217\,853\,219 \pm 1,166\,951\,246i$  med absoluttverdi  $1,187\,112\,141$ . De komplekse røttene kommer i komplekskonjugerte par, fordi koeffisientene i polynomet er reelle.

## Strogatz, oppgave 7.1.6

La  $Q$  være ladningen på kondensatorplaten på den siden av kondensatoren som er kalt 2 i figuren, da er ladningen på den andre platen  $-Q$ , og slik retningen på strømmen  $I$  er definert

i figuren, er  $\dot{Q} = I$ . I følge oppgaveteksten er  $V = V_{32} = -V_{23}$  "the voltage drop from point 3 to point 2 in the circuit", hvilket kan bety ett av to: enten at  $V = V_3 - V_2$  eller at  $V = V_2 - V_3$ , der  $V_2$  og  $V_3$  er spenningene i punktene 2 og 3. Det som i hvert fall er sikkert, er at

$$Q = C(V_2 - V_3) ,$$

der  $C$  er kapasitansen til kondensatoren. Det gir den oppgitte ligningen  $\dot{V} = -I/C$  når vi definerer  $V = V_3 - V_2$ . Siden  $V_1 = V_4$ , i følge figuren, er

$$V = V_3 - V_2 = (V_3 - V_4) + (V_1 - V_2) = f(I) + L\dot{I} .$$

Som kjent trengs det en spenningsforskjell  $V_1 - V_2$  over spolen med induktans  $L$  for å produsere en forandring i strømmen  $I$  gitt ved at  $V_1 - V_2 = L\dot{I}$ .

Vi finner altså ligningene

$$\dot{V} = -\frac{I}{C} , \quad \dot{I} = \frac{V}{L} - f(I) .$$

For å gjøre ligningen dimensjonsløs kan vi sette

$$I = \alpha x , \quad V = \beta w , \quad t = \gamma \tau ,$$

der  $x, w, \tau$  er dimensjonsløse og  $\alpha, \beta, \gamma$  er konstanter. Det gir ligningene

$$\frac{\beta}{\gamma} \frac{dw}{d\tau} = -\frac{\alpha x}{C} , \quad \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\beta w}{L} - f(\alpha x) ,$$

som har formen

$$\frac{dw}{d\tau} = -x , \quad \frac{dx}{d\tau} = w - \mu F(x) ,$$

dersom

$$\frac{\gamma\alpha}{\beta C} = 1 , \quad \frac{\gamma\beta}{\alpha L} = 1 , \quad \frac{\gamma}{\alpha} f(\alpha x) = \mu F(x) .$$

De to første ligningene her gir at

$$1 = \frac{\gamma\alpha}{\beta C} \frac{\gamma\beta}{\alpha L} = \frac{\gamma^2}{LC} ,$$

altså  $\gamma = \sqrt{LC}$ , og at

$$1 = \frac{\gamma\alpha}{\beta C} \Big/ \frac{\gamma\beta}{\alpha L} = \frac{\alpha^2 L}{\beta^2 C} ,$$

altså  $\alpha/\beta = \sqrt{C/L}$ . Så langt er  $\alpha$  en fri parameter, men forholdet  $\alpha/\beta$  er fastlagt.

For å få van der Pol-ligningen må vi nå anta at funksjonen  $f(I)$ , som er strøm-spenning-karakteristikken til tetrode-radiatorret (en tetrode har fire tilkoplingspunkter), har form av en spesiell tredjegradskurve,

$$f(I) = V_0 F\left(\frac{I}{I_0}\right) , \quad \text{med} \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - x .$$

Her er  $V_0$ , med dimensjon spenning, og  $I_0$ , med dimensjon strøm, to konstanter som kjenetegner det spesielle radiatorret det er snakk om. Velger vi  $\alpha = I_0$ , så har vi da at

$$\frac{\gamma}{\alpha} f(\alpha x) = \mu F(x) ,$$

og her er

$$\mu = \frac{\gamma}{\alpha} V_0 = \frac{V_0 \sqrt{LC}}{I_0} .$$

## Strogatz, oppgave 7.3.1

Gitt bevegelsesligningen

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2), \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2).$$

a) Linearisering i origo, ved at vi sløyfer høyere ordens ledd, gir:

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y.$$

Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenverdiene  $\lambda_{\pm} = 1 \pm i$ . Begge egenverdiene har positiv realdel, derfor er origo et ustabil fikspunkt, nærmere bestemt en ustabil spiral (et ustabil fokus).

b) Definisjonen av polarkoordinater  $(r, \theta)$  er at  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Det gir at

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta,$$

og følgelig

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

At  $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ , følger også direkte ved derivasjon av relasjonen  $r^2 = x^2 + y^2$ . Fra bevegelsesligningene ovenfor får vi at

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2}{r} = r - r^3 - 4r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= r - r^3 - r^3 \sin^2(2\theta) = r - r^3 - \frac{r^3}{2} (1 - \cos(4\theta)) = r - \frac{r^3}{2} (3 - \cos(4\theta)), \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{x^2 + y^2 + 4xy^3}{r^2} = 1 + 4r^2 \cos \theta \sin^3 \theta = 1 + 2r^2 \sin(2\theta) \sin^2 \theta \\ &= 1 + r^2 \sin(2\theta)(1 - \cos(2\theta)) = 1 + r^2 \left( \sin(2\theta) - \frac{1}{2} \sin(4\theta) \right). \end{aligned}$$

- c) Vi ser av ligningene ovenfor at  $\dot{r} \geq r - 2r^3$ . Hvis vi velger  $r_1 = 1/\sqrt{2}$ , så har vi derfor at  $\dot{r} \geq 0$  for  $r = r_1$ . På sirkelen  $r = r_1$  har vi forøvrig at  $\dot{r} = 0$  bare når  $\cos(4\theta) = -1$ , dvs. når  $4\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ .
- d) Vi ser også at  $\dot{r} \leq r - r^3$ . Hvis vi velger  $r_2 = 1$ , så har vi derfor at  $\dot{r} \leq 0$  for  $r = r_2$ . På sirkelen  $r = r_2$  har vi at  $\dot{r} = 0$  bare når  $\cos(4\theta) = 1$ , dvs. når  $4\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ .
- e) Poincaré–Bendixson-teoremet garanterer eksistensen av en grensesyklus i området  $r_1 \leq r \leq r_2$  dersom vi kan vise at det ikke finnes noe fikspunkt der, dvs. et punkt  $(r, \theta)$  med  $\dot{r} = 0$  og  $\dot{\theta} = 0$ . Dette beviset krever en ørliten innsats.

For enhver verdi av  $\theta$  finnes det garantert minst en verdi av  $r$  mellom  $r_1$  og  $r_2$  slik at  $\dot{r} = 0$ . Vi har nemlig valgt  $r_1$  og  $r_2$  slik at for alle  $\theta$  er  $\dot{r} \geq 0$  for  $r = r_1$  og  $\dot{r} \leq 0$  for

$r = r_2$ . Men for å finne et fikspunkt må vi ikke bare løse ligningen  $\dot{r} = 0$ , vi må løse samtidig ligningene  $\dot{r} = 0$  og  $\dot{\theta} = 0$ .

Ligningen  $\theta = 1 + 4r^2 \cos \theta \sin^3 \theta = 0$  er ekvivalent med at

$$\cos \theta \sin^3 \theta = -\frac{1}{4r^2}, \quad (1)$$

mens ligningen  $\dot{r} = r - r^3 - 4r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0$  er ekvivalent med at

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1 - r^2}{4r^2}. \quad (2)$$

Det finnes sikkert mange metoder for å vise at disse to ligningene ikke kan løses med  $r$  mellom  $r_1 = 1/\sqrt{2}$  og  $r_2 = 1$ . Vi kan f.eks. eliminere den ene variabelen og finne en ligning som bare inneholder den andre, for deretter å vise at denne ligningen ikke lar seg løse.

Vi kan eliminere  $r$  ved å addere ligning (1) og ligning (2), det gir ligningen

$$\cos \theta \sin^2 \theta (\sin \theta + \cos \theta) = -\frac{1}{4}.$$

Den har ingen løsning, det ser vi ved å plote venstresiden ved hjelp av Maple eller et annet matematikkprogram. Å bevise det analytisk er en litt større utfordring.

Alternativet er å eliminere  $\theta$  og få en ligning for  $r$ . Av ligning (2) ser vi at hvis  $r = 1$ , så må enten  $\cos \theta = 0$  eller  $\sin \theta = 0$ . Men det strider mot ligning (1), altså er  $r = 1$  ikke en løsning.

Ligning (2) dividert med ligning (1) gir at

$$\cot \theta = r^2 - 1.$$

Følgelig er

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\cot^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta} \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + (1 - r^2)^2)^2}.$$

For at dette skal stemme overens med ligning (2), med  $r < 1$ , må

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{1 - r^2}{((1 - r^2)^2 + 1)^2}.$$

Denne ligningen har ingen løsning for  $r$ , vi har nemlig at

$$\frac{1}{4r^2} > \frac{1 - r^2}{((1 - r^2)^2 + 1)^2}$$

for  $1/\sqrt{2} < r < 1$  (faktisk for alle  $r > 0$ ). Bevis: for  $1/\sqrt{2} \leq r < 1$  er

$$\frac{1 - r^2}{((1 - r^2)^2 + 1)^2} < 1 - r^2 \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Bevis for den siste ulikheten: vi kan vise at

$$g(r) \equiv \frac{1}{4r^2} - (1 - r^2) \geq 0$$

for  $1/\sqrt{2} \leq r < 1$  ved å vise at  $g(r) = 0$  og  $g'(r) = 0$  for  $r = 1/\sqrt{2}$ , mens  $g'(r) > 0$  for  $r > 1/\sqrt{2}$ .