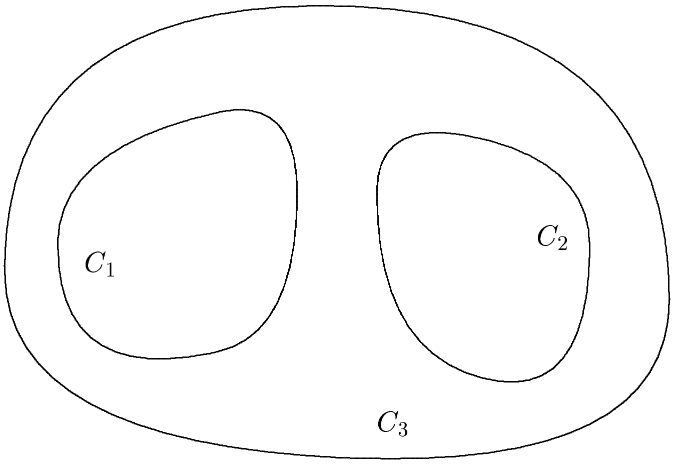
SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 5

Strogatz, oppgave 6.8.8

De tre kurvene må være plasert noe slik som dette:



Enhver lukket bane (periodisk løsning av bevegelsesligningen) i et todimensjonalt system har indeks $+1$. Denne indeksen er summen av indeksene til fikspunktene innenfor kurven, forutsatt at alle fikspunktene er isolerte. Siden indeksen til et isolert fikspunkt er enten $+1$ (for et knutepunkt eller senter) eller -1 (for et sadelpunkt), må det finnes et odde antall fikspunkt innenfor en lukket bane. Siden antallet fikspunkt innenfor den lukkete banen C_1 er odde, og antallet fikspunkt innenfor C_2 likeså er odde, og siden antallet fikspunkt totalt innenfor C_3 er odde, må det finnes et odde antall fikspunkt som er innenfor C_3 men utenfor både C_1 og C_2. Vi kan faktisk si enda litt mer, for summen av indeksene til fikspunktene som er innenfor C_3 og utenfor C_1 og C_2, må være -1. Det må altså finnes minst ett sadelpunkt i dette området.

Strogatz, oppgave 6.8.9

Her er et moteksempel, i polarkoordinater:

$$\dot{r} = r(r-1)(r-3) \;, \qquad \dot{\theta} = r - 2 \;.$$

Strogatz, oppgave 6.8.11

Vi skriver

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \;,$$

og den komplekskonjugerte av z er

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \;.$$

Ligningen $\dot{z} = z$ kan deles opp i en realdel: $\dot{x} = x$ og en imaginærdel: $\dot{y} = y$. Dette vektorfeltet har ett fikspunkt, nemlig $z = 0$, dvs. $x = y = 0$, og indeksen til dette fikspunktet er $+1$. Fikspunktet er et ustabilt knutepunkt, eller mer presist en ustabil stjerne.

Ligningen $\dot{z} = \overline{z}$ kan også deles opp i en realdel: $\dot{x} = x$ og en imaginærdel: $\dot{y} = -y$. Dette vektorfeltet har også ett fikspunkt, $z = 0$, med indeks -1. Fikspunktet er altså et sadelpunkt.

Ligningen $\dot{z} = z^k$ definerer et vektorfelt som fremdeles har $z = 0$ som sitt eneste fikspunkt. Indeksen til fikspunktet er k, det ser vi enklest i polarkoordinater: $z^k = r^k e^{ik\theta}$. Når vi går en gang rundt fikspunktet mot urviseren, vil det si at vi øker fasen θ til det komplekse tallet z med 2π. Da øker fasen til vektorfeltet z^k med k ganger 2π.

Tilsvarende ser vi at ligningen $\dot{z} = \overline{z}^k$ definerer et vektorfelt med $z = 0$ som eneste fikspunkt, og indeksen til fikspunktet er $-k$. Det stemmer forøvrig med at

$$\overline{z}^k = \frac{(z\overline{z})^k}{z^k} = r^{2k}\, z^{-k} \ .$$

Et litt annet resonnement som også gir indeks k for origo som fikspunkt til vektorfeltet z^k, er å se på z^k som et grensetilfelle av et polynom

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_k)$$

som har k forskjellige nullpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Hvert nullpunkt har indeks $+1$, liksom nullpunktet til polynomet z har indeks $+1$. Enhver kurve C som går rundt alle de k nullpunktene $a_1, a_2, \ldots, a_k$, har følgelig indeks k. Om vi nå flytter kontinuerlig på nullpunktene, uten å flytte dem ut av kurven C, kan ikke det forandre indeksen til kurven. Selv om vi flytter alle nullpunktene sammen i origo, vil kurven C fremdeles måtte ha indeks k. I følge dette resonnementet er det naturlig å se på $z = 0$ som et k-dobbelt nullpunkt for z^k.

Ser vi på femtegradspolynomet $z^5 + z^3 - 1$, så kan det faktoriseres som $z^5 + z^3 - 1 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)(z - a_5)$, og hvert av nullpunktene a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 har indeks $+1$. Går vi f.eks. en gang rundt enhetssirkelen $|z| = 1$, mot urviseren, og måler indeksen, dvs. hvor mange ganger fasen til polynomet $z^5 + z^3 - 1$ øker med 2π, så gir dette direkte antallet nullpunkt til polynomet innenfor enhetssirkelen. Går vi rundt sirkelen $|z| = 2$, så finner vi antallet nullpunkt med $|z| < 2$. Og så videre.

Prøv følgende kommandoer i Maple! De lager en figur som viser at når z løper rundt enhetssirkelen en gang, så løper $z^5 + z^3 - 1$ tre ganger rundt origo, dvs. at indeksen til enhetssirkelen er tre, og det finnes tre nullpunkt til polynomet innenfor enhetssirkelen. Prøv også andre verdier for r.

```
> r := 1; z := r*exp(I*theta); p := z^5+z^3-1;
> plot([Re(p),Im(p),theta=0..2*Pi],scaling=constrained);
```

Polynomet har en reell rot, som er $0,837\,619\,775$, og fire komplekse røtter: $-0,636\,663\,107 \pm 0,664\,701\,565\,\mathrm{i}$ med absoluttverdi $0,920\,417\,341$; og $0,217\,853\,219 \pm 1,166\,951\,246\,\mathrm{i}$ med absoluttverdi $1,187\,112\,141$. De komplekse røttene kommer i komplekskonjugerte par, fordi koeffisientene i polynomet er reelle.

Strogatz, oppgave 7.1.6

La Q være ladningen på kondensatorplaten på den siden av kondensatoren som er kalt 2 i figuren, da er ladningen på den andre platen $-Q$, og slik retningen på strømmen I er definert i figuren, er $\dot{Q} = I$. I følge oppgaveteksten er $V = V_{32} = -V_{23}$ “the voltage drop from point 3 to point 2 in the circuit”, hvilket kan bety ett av to: enten at $V = V_3 - V_2$ eller at $V = V_2 - V_3$, der V_2 og V_3 er spenningene i punktene 2 og 3. Det som i hvert fall er sikkert, er at

$$Q = C(V_2 - V_3) ,$$

der C er kapasitansen til kondensatoren. Det gir den oppgitte ligningen $\dot{V} = -I/C$ når vi definerer $V = V_3 - V_2$. Siden $V_1 = V_4$, i følge figuren, er

$$V = V_3 - V_2 = (V_3 - V_4) + (V_1 - V_2) = f(I) + L\dot{I} .$$

Som kjent trengs det en spenningsforskjell $V_1 - V_2$ over spolen med induktans L for å produsere en forandring i strømmen I gitt ved at $V_1 - V_2 = L\dot{I}$.
Vi finner altså ligningene

$$\dot{V} = -\frac{I}{C} , \qquad \dot{I} = \frac{V}{L} - f(I) .$$

For å gjøre ligningen dimensjonsløs kan vi sette

$$I = \alpha x , \qquad V = \beta w , \qquad t = \gamma\tau ,$$

der x, w, τ er dimensjonsløse og α, β, γ er konstanter. Det gir ligningene

$$\frac{\beta}{\gamma}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\alpha x}{C} , \qquad \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\beta w}{L} - f(\alpha x) ,$$

som har formen

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = -x , \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = w - \mu F(x) ,$$

dersom

$$\frac{\gamma\alpha}{\beta C} = 1 , \qquad \frac{\gamma\beta}{\alpha L} = 1 , \qquad \frac{\gamma}{\alpha} f(\alpha x) = \mu F(x) .$$

De to første ligningene her gir at

$$1 = \frac{\gamma\alpha}{\beta C}\frac{\gamma\beta}{\alpha L} = \frac{\gamma^2}{LC} ,$$

altså $\gamma = \sqrt{LC}$, og at

$$1 = \frac{\gamma\alpha}{\beta C}\bigg/\frac{\gamma\beta}{\alpha L} = \frac{\alpha^2 L}{\beta^2 C} ,$$

altså $\alpha/\beta = \sqrt{C/L}$. Så langt er α en fri parameter, men forholdet α/β er fastlagt.
For å få van der Pol-ligningen må vi nå anta at funksjonen $f(I)$, som er strøm-spenning-karakteristikken til tetrode-radiorøret (en tetrode har fire tilkoplingspunkter), har form av en spesiell tredjegradskurve,

$$f(I) = V_0\, F\left(\frac{I}{I_0}\right) , \qquad \text{med} \qquad F(x) = \frac{x^3}{3} - x .$$

Her er V_0, med dimensjon spenning, og I_0, med dimensjon strøm, to konstanter som kjennetegner det spesielle radiorøret det er snakk om. Velger vi $\alpha = I_0$, så har vi da at

$$\frac{\gamma}{\alpha} f(\alpha x) = \mu F(x) ,$$

og her er

$$\mu = \frac{\gamma}{\alpha} V_0 = \frac{V_0\sqrt{LC}}{I_0} .$$

Strogatz, oppgave 7.3.1

Gitt bevegelseligningen

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2)\ , \qquad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)\ .$$

a) Linearisering i origo, ved at vi sløyfer høyere ordens ledd, gir:

$$\dot{x} = x - y\ , \qquad \dot{y} = x + y\ .$$

Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenverdiene $\lambda_{\pm} = 1 \pm \mathrm{i}$. Begge egenverdiene har positiv realdel, derfor er origo et ustabilt fikspunkt, nærmere bestemt en ustabil spiral (et ustabilt fokus).

b) Definisjonen av polarkoordinater (r, θ) er at $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Det gir at

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\ , \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\ ,$$

og følgelig

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}\ , \qquad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}\ .$$

At $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$, følger også direkte ved derivasjon av relasjonen $r^2 = x^2 + y^2$.
Fra bevegelsesligningene ovenfor får vi at

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2}{r} = r - r^3 - 4r^3\cos^2\theta\,\sin^2\theta \\ &= r - r^3 - r^3\sin^2(2\theta) = r - r^3 - \frac{r^3}{2}\,(1 - \cos(4\theta)) = r - \frac{r^3}{2}\,(3 - \cos(4\theta))\ , \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{x^2 + y^2 + 4xy^3}{r^2} = 1 + 4r^2\cos\theta\,\sin^3\theta = 1 + 2r^2\sin(2\theta)\,\sin^2\theta \\ &= 1 + r^2\sin(2\theta)(1 - \cos(2\theta)) = 1 + r^2\left(\sin(2\theta) - \frac{1}{2}\sin(4\theta)\right)\ . \end{aligned}$$

c) Vi ser av ligningene ovenfor at $\dot{r} \geq r - 2r^3$. Hvis vi velger $r_1 = 1/\sqrt{2}$, så har vi derfor at $\dot{r} \geq 0$ for $r = r_1$. På sirkelen $r = r_1$ har vi forøvrig at $\dot{r} = 0$ bare når $\cos(4\theta) = -1$, dvs. når $4\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$.

d) Vi ser også at $\dot{r} \leq r - r^3$. Hvis vi velger $r_2 = 1$, så har vi derfor at $\dot{r} \leq 0$ for $r = r_2$. På sirkelen $r = r_2$ har vi at $\dot{r} = 0$ bare når $\cos(4\theta) = 1$, dvs. når $4\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$.

e) Poincaré–Bendixson-teoremet garanterer eksistensen av en grensesyklus i området $r_1 \leq r \leq r_2$ dersom vi kan vise at det ikke finnes noe fikspunkt der, dvs. et punkt (r, θ) med $\dot{r} = 0$ og $\dot{\theta} = 0$. Dette beviset krever en ørliten innsats.
For enhver verdi av θ finnes det garantert minst en verdi av r mellom r_1 og r_2 slik at $\dot{r} = 0$. Vi har nemlig valgt r_1 og r_2 slik at for alle θ er $\dot{r} \geq 0$ for $r = r_1$ og $\dot{r} \leq 0$ for

$r = r_2$. Men for å finne et fikspunkt må vi ikke bare løse ligningen $\dot{r} = 0$, vi må løse samtidig ligningene $\dot{r} = 0$ og $\dot{\theta} = 0$.
Ligningen $\dot{\theta} = 1 + 4r^2 \cos\theta \sin^3\theta = 0$ er ekvivalent med at

$$\cos\theta \sin^3\theta = -\frac{1}{4r^2} \,, \tag{1}$$

mens ligningen $\dot{r} = r - r^3 - 4r^3 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0$ er ekvivalent med at

$$\cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{1 - r^2}{4r^2} \,. \tag{2}$$

Det finnes sikkert mange metoder for å vise at disse to ligningene ikke kan løses med r mellom $r_1 = 1/\sqrt{2}$ og $r_2 = 1$. Vi kan f.eks. eliminere den ene variabelen og finne en ligning som bare inneholder den andre, for deretter å vise at denne ligningen ikke lar seg løse.

Vi kan eliminere r ved å addere ligning (1) og ligning (2), det gir ligningen

$$\cos\theta \sin^2\theta (\sin\theta + \cos\theta) = -\frac{1}{4} \,.$$

Den har ingen løsning, det ser vi ved å plotte venstresiden ved hjelp av Maple eller et annet matematikkprogram. Å bevise det analytisk er en litt større utfordring.

Alternativet er å eliminere θ og få en ligning for r. Av ligning (2) ser vi at hvis $r = 1$, så må enten $\cos\theta = 0$ eller $\sin\theta = 0$. Men det strider mot ligning (1), altså er $r = 1$ ikke en løsning.

Ligning (2) dividert med ligning (1) gir at

$$\cot\theta = r^2 - 1 \,.$$

Følgelig er

$$\cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{\cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} \, \frac{1}{1 + \cot^2\theta} = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + (1 - r^2)^2)^2} \,.$$

For at dette skal stemme overens med ligning (2), med $r < 1$, må

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{1 - r^2}{((1 - r^2)^2 + 1)^2} \,.$$

Denne ligningen har ingen løsning for r, vi har nemlig at

$$\frac{1}{4r^2} > \frac{1 - r^2}{((1 - r^2)^2 + 1)^2}$$

for $1/\sqrt{2} < r < 1$ (faktisk for alle $r > 0$). Bevis: for $1/\sqrt{2} \le r < 1$ er

$$\frac{1 - r^2}{((1 - r^2)^2 + 1)^2} < 1 - r^2 \le \frac{1}{4r^2} \,.$$

Bevis for den siste ulikheten: vi kan vise at

$$g(r) \equiv \frac{1}{4r^2} - (1 - r^2) \ge 0$$

for $1/\sqrt{2} \le r < 1$ ved å vise at $g(r) = 0$ og $g'(r) = 0$ for $r = 1/\sqrt{2}$, mens $g'(r) > 0$ for $r > 1/\sqrt{2}$.