SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 6

Strogatz, oppgave 7.6.13

Vi ser på Duffing-oscillatoren, som har bevegelsesligningen

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0 \; .$$

Vi antar at koordinaten x og tiden t er dimensjonsløse og at $0 < \epsilon << 1$, og vi antar startverdiene $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Etter at vi multipliserer bevegelsesligningen med $\dot{x}$, kan den integreres en gang, og det gir oss en bevegelseskonstant, nemlig energien E,

$$\frac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{\epsilon}{4}\,x^4 = E \; .$$

Fra startverdiene kan vi finne verdien av E,

$$E = \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{\epsilon}{4}\,a^4 \; .$$

Det er klart at oscillatoren svinger mellom ytterpunktene $x = \pm a$.

Vi kan løse ut for hastigheten $\dot{x}$, da finner vi

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2E - x^2 - \frac{\epsilon}{2}\,x^4} \; .$$

La oss definere

$$f(x) = \sqrt{2E - x^2 - \frac{\epsilon}{2}\,x^4} = \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{\epsilon}{2}\,(a^4 - x^4)} = \sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}\,(a^2 + x^2)} \; .$$

La T være perioden til oscillatoren. I den halve perioden fra $t = 0$, da $x = a$, og til $t = T/2$, da $x = -a$, er $\dot{x} \leq 0$, altså $\dot{x} = -f(x)$, og vi har at

$$\frac{T}{2} = \int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t = \int_a^{-a} \frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = -\int_a^{-a} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \; .$$

Dette er et eksakt uttrykk, som vi nå vil rekkeutvikle til og med andre orden i ϵ. Binomialformelen

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,y^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,y^n + \cdots$$

med $\alpha = -1/2$ gir at

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\,(a^2 + x^2) + \frac{3\epsilon^2}{32}\,(a^2 + x^2)^2 + \cdots\right) \; .$$

Vi får bruk for følgende integral,

$$I_0 = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi \; , \qquad I_2 = \int_{-a}^{a} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi a^2}{2} \; , \qquad I_4 = \int_{-a}^{a} \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{3\pi a^4}{8} \; .$$

Substitusjonen $x = a\sin u$ med $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ er alt vi trenger for å løse integralene (enda enklere er det å bruke et integrasjonsprogram som f.eks. Maple!). Alt i alt gir det at

$$T = 2I_0 - \frac{\epsilon}{2}\,(a^2 I_0 + I_2) + \frac{3\epsilon^2}{16}\,(a^4 I_0 + 2a^2 I_2 + I_4) + \cdots = 2\pi\left(1 - \frac{3\epsilon a^2}{8} + \frac{57\epsilon^2 a^4}{256} + \cdots\right) \; .$$

Strogatz, oppgave 7.6.14

Den gitte ligningen

$$\ddot{x} + x + \epsilon \dot{x}^3 = 0$$

er nesten den samme som Duffing-oscillatoren, vi bare erstatter x^3 med $\dot{x}^3$. Den vesentlige forskjellen er at systemet ikke lenger er konservativt.

I den formalismen som presenteres i kapittel 7 i Strogatz, ligning (7.6.45) og utover, side 223 og utover, så svarer denne ligningen til at $h = h(x, \dot{x}) = \dot{x}^3$.

Løsningen av ligningen til nullte orden i ϵ er

$$x_0 = r(T)\cos(\tau + \phi(T)) \; , \qquad \dot{x}_0 = -r(T)\sin(\tau + \phi(T)) \; ,$$

der $\tau = t$ er den "raske" tiden og $T = \epsilon t$ den "sakte" tiden.

Det som på engelsk kalles "the average equations" (på norsk: "de midlede ligningene"?) er ligning (53), s. 224:

$$r' = \langle h \sin\theta \rangle \; , \qquad r\phi' = \langle h \cos\theta \rangle \; .$$

Her er r' og ϕ' de deriverte med hensyn på T. Vi skriver $\theta = \tau + \phi$, og vinkelparentesene $\langle\rangle$ representerer midling over vinkelen θ, dvs.,

$$\begin{aligned}
\langle h \sin\theta \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; h \, \sin\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \dot{x}_0^{\,3} \, \sin\theta = -\frac{r^3}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \sin^4\theta \; , \\
\langle h \cos\theta \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; h \, \cos\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \dot{x}_0^{\,3} \, \cos\theta = -\frac{r^3}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \sin^3\theta \, \cos\theta \; .
\end{aligned}$$

I følge tabellene som følger etter ligning (53) er

$$\begin{aligned}
\langle \sin^4\theta \rangle &= = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \sin^4\theta = \frac{3}{8} \; , \\
\langle \sin^3\theta \, \cos\theta \rangle &= = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \; \sin^3\theta \, \cos\theta = 0 \; .
\end{aligned}$$

De midlede ligningene er derfor:

$$r' = -\frac{3r^3}{8} \; , \qquad r\phi' = 0 \; .$$

Vi kan for sikkerhets skyld utlede de middelverdiene vi har brukt. Vi har at

$$\sin^4\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} - 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}}{16} \; ,$$

og

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta \, \cos\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{(-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{16\,\mathrm{i}} \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - 2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}}{16\,\mathrm{i}} \; .
\end{aligned}$$

Med disse eksplisitte formlene er midlingen enkel, for middelverdien av $\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\theta}$ med k heltallig er lik 0 hvis $k \neq 0$ og lik 1 hvis $k = 0$.

Startbetingelsene $x(0) = a$ og $\dot{x}(0) = 0$ gir $r(T) = a$ og $\phi(T) = 0$ for $T = 0$. Løsningen av den midlede ligningen for ϕ er da $\phi(T) = 0$. Den midlede ligningen for r skriver vi som

$$-\frac{8r'}{3r^3} = 1 \ .$$

Den gir at

$$\frac{4}{3r^2} = T - T_0 \ ,$$

med en integrasjonskonstant T_0 gitt av startbetingelsen,

$$T_0 = -\frac{4}{3a^2} \ .$$

Det gir at

$$r = \frac{2}{\sqrt{3(T-T_0)}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^2T+4}} = \frac{2a}{\sqrt{3a^2\epsilon t+4}} \ .$$

Altså:

$$x = x_0 = \frac{2a\cos t}{\sqrt{3a^2\epsilon t+4}} \ .$$

Her er et lite Maple-program for å sammenligne denne to-tids-løsningen med den numeriske løsningen. Overensstemmelsen er imponerende, men sammenligningen viser også en mangel ved den nullte ordens to-tids-løsningen x_0, nemlig at den har korrekt startverdi 0 for $\dot{x}$ bare til nullte orden i ϵ. For å få startverdien for $\dot{x}$ korrekt til første orden i ϵ, måtte vi også løse for den førsteordens tilnærmingen x_1.

```
> with(plots):
> with(DEtools):
> epsilon := 2:
> a := 1:
> p1 :=
> DEplot(diff(x(t),t$2)+epsilon*diff(x(t),t)^3+x(t)=0,x(t)
> ,t=0..50
> ,[[x(0)=a,D(x)(0)=0]]
> ,stepsize=0.1):
> display(p1);
> p2 :=
> plot(2*a*cos(t)/sqrt(3*epsilon*a^2*t+4),t=0..50,numpoints=500):
> display(p2);
> display(p1,p2);
```

Strogatz, oppgave 8.1.8

Gitt ligningen

$$\epsilon\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} - \sin\phi + \gamma\sin\phi\cos\phi \ ,$$

med $\epsilon > 0$ og $\gamma > 0$. Hvis vi multipliserer ligningen med ϵ og innfører en ny tidsvariabel $u = \tau/\epsilon$, får ligningen formen

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} + \epsilon\sin\phi\,(1-\gamma\cos\phi) = 0 \ .$$

Fikspunkt, dvs. løsninger med ϕ konstant, har vi for $\sin\phi = 0$ eller $\cos\phi = 1/\gamma$. Den siste typen fikspunkt eksisterer bare for $\gamma \geq 1$.

For å analysere stabiliteten av fikspunktene definerer vi, som vanlig,

$$v = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} \,,$$

slik at

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -v - \epsilon \sin\phi\,(1 - \gamma\cos\phi) = 0 \,.$$

La oss definere $\dot{\phi} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}u$ og $\dot{v} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$. Vi har Jacobi-matrisn

$$A = \frac{\partial(\dot{\phi}, \dot{v})}{\partial(\phi, v)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon(-\cos\phi + 2\gamma\cos^2\phi - \gamma) & -1 \end{pmatrix} .$$

Egenverdiligningen er

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda + \epsilon(\cos\phi - 2\gamma\cos^2\phi + \gamma) = 0 \,,$$

og egenverdiene er

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon(\cos\phi - 2\gamma\cos^2\phi + \gamma)}\right) .$$

Vi har tre fikspunkt å vurdere. Dersom $\sin\phi = 0$, kan enten $\phi = 0$ eller $\phi = \pi$. For $\phi = 0$ er egenverdiene

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon(1 - \gamma)}\right) .$$

Vi ser at for $0 < \gamma < 1$ har begge egenverdiene negativ realdel, slik at fikspunktet er stabilt. Hvis $4\epsilon(1 - \gamma) > 1$ har vi to komplekse egenverdier, dvs. at fikspunktet er en stabil spiral, og vi vil få dempede oscillasjoner omkring fikspunktet.
For $\gamma > 1$ er den ene egenverdien positiv, slik at fikspunktet er ustabilt, mer presist et sadelpunkt. Ustabiliteten inntreffer samtidig med at fikspunktet $\cos\phi = 1/\gamma$ oppstår.

For $\phi = \pi$ er egenverdiene

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\epsilon(1 + \gamma)}\right) .$$

En egenverdi er positiv og en er negativ, slik at dette fikspunktet alltid er et sadelpunkt.

For $\cos\phi = 1/\gamma$ er egenverdiene

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)}\right) .$$

Dette fikspunktet eksisterer bare for $\gamma > 1$, og det er da alltid stabilt. For

$$4\epsilon\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) > 1$$

har vi to komplekse egenverdier, slik at fikspunktet er en stabil spiral, og vi vil få dempede oscillasjoner.

Bifurkasjonen som skjer ved $\gamma = 1$, er en overkritisk høygaffelbifurkasjon.

Vi kan spørre om det finnes grensesykler. Og vi kan svare nei, fordi vi finner en Liapunov-funksjon, dvs. en størrelse som avtar langs enhver bane. Det er naturlig å se på hva som skjer med den størrelsen som er energien til systemet hvis vi fjerner dempningen, nemlig

$$E = \int \mathrm{d}\tau \, \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}u^2} + \epsilon \sin\phi \, (1 - \gamma \cos\phi) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} \right)^2 + \epsilon \left(-\cos\phi + \frac{\gamma}{2} \cos^2\phi) \right) .$$

Det følger av bevegelsesligningen at

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}u^2} + \epsilon \sin\phi \, (1 - \gamma \cos\phi) \right) = - \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 < 0 \; ,$$

der den ekte ulikheten gjelder så sant $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau \neq 0$. Hvis ikke partikkelen ligger i ro, så avtar E hele tiden. Periodisk bevegelse er derfor umulig.

Oppsummering, grunnlag for å tegne stabilitetsdiagram:
$\phi = 0$ er et stabilt fikspunkt for $\gamma \leq 1$ (knutepunkt for $\epsilon \leq 1/(4(1-\gamma))$, spiral ellers).
$\cos\phi = 1/\gamma$ er et stabilt fikspunkt for $\gamma \geq 1$ (knutepunkt for $\epsilon \leq \gamma/(4(\gamma^2 - 1))$, spiral ellers).
Andre stabile fikspunkt finnes ikke.
Grensesykler, stabile eller ustabile, finnes heller ikke.

Strogatz, oppgave 8.1.10

Ligninger:

$$\dot{S} = r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E} \right) , \qquad \dot{E} = r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E} \right) - P \frac{B}{S} \; .$$

S er den gjennomsnittlige størrelsen av trærne og E er "energireserven", et mål på skogens helsetilstand. Ligningene forutsetter at $S > 0$ og $E > 0$, siden begge variable opptrer i nevnere.

a) Konstantene r_S og r_E er vekstrater for S og E dersom ingenting hindrer veksten. K_S og K_E er de likevektsverdiene av S og E som ville innstille seg hvis det ikke fantes insekter. B er antallet insekter ("budworms") som spiser trærnes nyskudd ("buds"), antallet antas her konstant. Leddet PB/S er proporsjonalt med noe sånt som det gjennomsnittlige antallet insekter pr. skudd, og er uttrykk for at insektene er en sykdom på skogen.

b) Vi innfører skaleringskonstanter α, β, γ slik at $S = \alpha x$, $E = \beta y$, $t = \gamma\tau$, der x, y, τ er dimensjonsløse. Det gir ligningene

$$\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = r_S \alpha x \left(1 - \frac{\alpha x}{K_S} \frac{K_E}{\beta y} \right) , \qquad \frac{\beta}{\gamma} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = r_E \beta y \left(1 - \frac{\beta y}{K_E} \right) - P \frac{B}{\alpha x} \; .$$

Ligningene inneholder opprinnelig fem konstante parametre: r_S, r_E, K_S, K_E og PB. Vi kan velge fritt våre tre konstanter α, β, γ og dermed redusere antallet parametre til to. Hvor i ligningene vi ønsker å plasere de to gjenværende parametrene, er delvis en smaksak, men i neste punkt i oppgaven spørres det etter hva som skjer når B varierer, og derfor er det naturlig å beholde en parameter som er proporsjonal med B. Den siste av de to bevegelsesligningene kan vi skrive på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y(1 - y) - \frac{b}{x} \; ,$$

ved at vi setter

$$\gamma = \frac{1}{r_E}\ , \qquad \beta = K_E\ , \qquad b = \frac{\gamma PB}{\alpha\beta} = \frac{PB}{\alpha r_E K_E}\ .$$

Her er α fremdeles fritt valgbar. Det betyr at vi kan skrive den første ligningen som

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \rho x\left(1 - \frac{x}{y}\right)\ ,$$

ved at vi setter

$$\alpha = \frac{K_S\beta}{K_E} = K_S\ , \qquad \rho = \gamma r_S = \frac{r_S}{r_E}\ , \qquad b = \frac{PB}{\alpha r_E K_E} = \frac{PB}{K_S r_E K_E}\ .$$

De to parametrene som står igjen i ligningene, er da ρ og b.

c) Nullkliner: vi har at $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = 0$ for $x = y$, og $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau = 0$ for $x = b/(y(1-y))$.
Vi har altså fikspunkt for $x = y = b/(y(1-y))$, dvs. $y^2(1-y) = b$. For $y \geq 0$ har polynomet $y^2(1-y)$ ett maksimum, nemlig for

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^2 - y^3) = 2y - 3y^2\ ,$$

som gir at $y = 2/3$. Maksimumsverdien er $4/27$. Det betyr at for $b > 4/27$ har ligningen $y^2(1-y) = b$ ingen løsning, og det fins ingen fikspunkt (med $y > 0$, som er forutsetningen). For $0 < b < 4/27$ har ligningen to løsninger, en med $y > 2/3$ og den andre med $y < 2/3$, og det fins to fikspunkt. Ved den kritiske verdien $b = 4/27$ skjer det en typisk sadel-knutepunkt-bifurkasjon: to fikspunkt, ett stabilt og ett ustabilt, oppstår av ingenting.
Vi har riktignok ikke ennå sjekket stabiliteten til fikspunktene. Den lineære stabiliteten er gitt av egenverdiene til Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \rho\left(1 - \frac{2x}{y}\right) & \frac{\rho x^2}{y^2} \\ \frac{b}{x^2} & 1 - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & \rho \\ \frac{y(1-y)}{x} & 1 - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & \rho \\ 1 - y & 1 - 2y \end{pmatrix},$$

der vi har brukt at $x = y$ og $b/x = y(1-y)$ for et fikspunkt. Summen av egenverdiene er $\tau = \operatorname{Tr} A = -\rho + 1 - 2y$, og produktet av egenverdiene er $\det A = \rho(3y - 2)$.
For det ene fikspunktet er, som vi har sett, $y > 2/3$, og da er $\operatorname{Tr} A < -\rho - (1/3) < 0$, mens $\det A > 0$. Det betyr at begge egenverdiene til matrisen A har negativ realdel, og dette fikspunktet er stabilt.
For det andre fikspunktet er $y < 2/3$, og da er $\det A < 0$, slik at de to egenverdiene må være reelle og ha motsatt fortegn. Dette fikspunktet er ustabilt, det er et sadelpunkt.

d) Her er en Maple-versjon av et faseplott. Prøv selv!

```
>  with(DEtools):
>  rho := 1.5;
>  b := 3.5/27;
>  DEplot(
>  [diff(x(t),t)=rho*x(t)*(1-(x(t)/y(t)))
>  ,diff(y(t),t)=y(t)*(1-y(t))-(b/x(t))]
>  ,[x(t),y(t)]
>  ,t=0..20
>  ,x=0.02..1,y=0.02..1
>  ,[[x(0)=0.9,y(0)=0.5]]
>  ,stepsize=0.02);
```

Strogatz, oppgave 8.2.8

Gitt modellen

$$\dot{x} = x(x(1-x) - y) \ , \qquad \dot{y} = y(x-a) \ ,$$

der x representerer byttedyr, y representerer rovdyr, og a er konstant.

a) Nullkliner:
Ligningen $\dot{x} = 0$ gir enten $x = 0$ eller $y = x(1-x)$.
Ligningen $\dot{y} = 0$ gir enten $y = 0$ eller $x = a$.

b) Fikspunkt:
Ligningene $\dot{x} = 0$ og $\dot{y} = 0$ tilsammen har følgende løsninger:

i) $(x, y) = (0, 0)$.
ii) $(x, y) = (1, 0)$.
iii) $(x, y) = (a, a - a^2)$.
iv) For $a = 0$ er $(x, y) = (0, y)$ et fikspunkt for enhver verdi av y.

Dersom $a = 0$, er i) og iii) identiske, og dersom $a = 1$, er ii) og iii) identiske.
Dette gir alle fikspunktene. Det bør kanskje presiseres at negative verdier av x eller y ikke gir fysisk mening. Fikspunkt iii) er altså utenfor det fysiske området dersom $a < 0$ eller $a > 1$ (det forutsettes forøvrig i oppgaveteksten at $a \geq 0$).

Den lineære stabiliteten av fikspunktene er gitt av Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - y & -x \\ y & x - a \end{pmatrix} .$$

For fikspunkt i) er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} .$$

Denne matrisen er allerede diagonal, og egenverdiene er 0 og $-a$. Foreløpig konklusjon: fikspunktet er marginalt stabilt for alle $a \geq 0$, i følge den lineære stabilitetsanalysen, og vi må undersøke nærmere for å avgjøre spørsmålet om stabilitet. Ettersom x-aksen alltid er en marginalt stabil retning i dette fikspunktet, og ettersom $y = 0$ alltid er en løsning av bevegelsesligningen for y, er det naturlig å se hva som skjer for $y = 0$. Da er $\dot{x} = x^2(1-x) > 0$ for $0 < x < 1$, og det viser at fikspunkt i) alltid er ustabilt.

For fikspunkt ii) er

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix} .$$

Denne matrisen er triangulær (den har bare nuller på den ene siden av diagonalen), og det betyr at egenverdiene står på diagonalen: de er -1 og $1 - a$. For $a < 1$ har vi en negativ og en positiv egenverdi, og da er dette fikspunktet et sadelpunkt, altså ustabilt. For $a > 1$ er begge egenverdiene negative, og fikspunktet er stabilt. For $a = 1$ er fikspunktet marginalt stabilt, i følge den lineære stabilitetsanalysen. En skisse av faseportrettet nær $(x, y) = (1, 0)$ for $a = 1$ antyder at fikspunktet da er stabilt.

Bifurkasjonen som skjer for $a = 1$ er transkritisk: de to fikspunktene $(1,0)$ og $(a, a - a^2)$ kolliderer og utveksler stabilitet.

For fikspunkt iii) er

$$A = \begin{pmatrix} a - 2a^2 & -a \\ a - a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Summen av egenverdiene er $\tau = \mathrm{Tr}\,A = a - 2a^2 = a(1 - 2a)$, og produktet av dem er $\Delta = \det A = a^2 - a^3 = a^2(1 - a)$.
For $0 < a < 1/2$ er $\Delta > 0$ og $\tau > 0$, slik at begge egenverdiene har positiv realdel, og fikspunktet er ustabilt.
For $1/2 < a < 1$ er $\Delta > 0$ og $\tau < 0$, slik at begge egenverdiene har negativ realdel, og fikspunktet er stabilt.
For $a = 1/2$ er egenverdiene komplekse, lik $\pm\mathrm{i}/\sqrt{8}$, og det betyr at vi har å gjøre med en Hopf-bifurkasjon.
For $a > 1$ er $\Delta < 0$, og fikspunktet er et sadelpunkt, men det ligger utenfor det fysiske området!
For $a = 1$ er fikspunktet marginalt stabilt, i følge den lineære stabilitetsanalysen. Som vi har sett, faller fikspunktene ii) og iii) sammen for $a = 1$, og vi har allerede antydet at det sammenfallende fikspunktet er stabilt.

c) Anta $a > 1$. For $x \geq a$ vil da $\dot{x} < 0$, og selv om vi starter med $x \geq a$, vil vi før eller siden få $x < a$. Siden vil vi aldri kunne få $x \geq a$ igjen. Men for $x < a$ og $y > 0$ er $\dot{y} < 0$. Resultatet vil bli at rovdyrene dør ut, nemlig at $y \to 0$ når $t \to \infty$.
Vi kan kanskje forstå dette mer intuitivt ut fra modellen. Uten rovdyr, dvs. med $y = 0$, vil populasjonen av byttedyr gå mot den stabile verdien $x = 1$. Men i følge modellen er denne populasjonen av byttedyr ikke stor nok til å fø en aldri så liten populasjon av rovdyr når $a > 1$, for hvis $x = 1$ og $y > 0$, så er $\dot{y} = y(x - a) = y(1 - a) < 0$. Det er da klart at rovdyrene er dømt til å dø ut.

d) Vi har sett ovenfor at fikspunkt iii) skifter stabilitet for $a = 1/2$, og at det skjer ved en Hopf-bifurkasjon. Spørsmålet er om bifurkasjonen er subkritisk: dvs. at det eksisterer en ustabil grensesyklus sammen med det stabile fikspunktet for $a > 1/2$; eller superkritisk: dvs. at det eksisterer en stabil grensesyklus sammen med det ustabile fikspunktet for $a < 1/2$. Merk språkbruken: at bifurkasjonen er subkritisk, betyr her at grensesyklusen eksisterer for $a > 1/2$. At bifurkasjonen er superkritisk, betyr at grensesyklusen eksisterer for $a < 1/2$.
Med tilgang til Maple kan vi f.eks. sjekke numerisk at bifurkasjonen er superkritisk, dvs. at det finnes en grensesyklus for $a < 1/2$. Prøv f.eks. programmet nedenfor med ulike verdier av a og ulike startverdier $x(0)$ og $y(0)$. Merk: hvis grensesyklusen er ustabil, kan vi finne den ved å integrere bakover i tiden, f.eks. skrive: $t = -20..0$.

```
>  with(DEtools):
>  a := 0.49;
>  DEplot(
>  [diff(x(t),t)=x(t)*(x(t)*(1-x(t))-y(t))
>  ,diff(y(t),t)=y(t)*(x(t)-a)]
>  ,[x(t),y(t)]
>  ,t=0..400
>  ,[[x(0)=a+0.15,y(0)=a-a^2+0.15]]
>  ,stepsize=0.2);
```

e) For å estimere frekvensen av grensesyklusoscillasjoner når $a \approx 1/2$ antar vi simpelthen at amplituden (utsvinget fra fikspunktet $(a, a-a^2)$) er så liten at vi kan bruke med god tilnærming de lineariserte ligningene. Vi beregnet tidligere Jacobi-matrisen A, i dette fikspunktet, og for $a = 1/2$ er

$$A = \begin{pmatrix} a-2a^2 & -a \\ a-a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} .$$

Determinanten er $\Delta = 1/8 = \omega^2$, der ω er vinkelfrekvensen for de lineære oscillasjonene (dvs. for løsningene av de lineariserte bevegelsesligningene). Vinkelfrekvensen er altså $\omega = 1/\sqrt{8}$ i grensen $a \to 1/2$.
Etter hvert som kontrollparameteren a fjerner seg fra den kritiske verdien 1/2, vil amplituden til oscillasjonene øke, og siden ligningene er ikkelineære, vil det føre til at frekvensen forandres. Men så langt driver vi ikke våre undersøkelser her.
La oss likevel (i et forsøk på å være pedagogiske) skrive ned ligningene for oscillasjonene omkring fikspunktet uttrykt i nye variable u, v som er slik at $(u, v) = (0, 0)$ i fikspunktet.
Vi definerer

$$x = a + u \ , \qquad y = a - a^2 + v \ .$$

Det gir ligningene

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= (a+u)((a+u)(1-a-u) - a + a^2 - v) = (a+u)((1-2a)u - u^2 - v) \\ &= a(1-2a)u - av + (1-3a)u^2 - u^3 - uv \ , \\ \dot{v} = \dot{y} &= (a - a^2 + v)u = a(1-a)u + uv \ . \end{aligned}$$

Koeffisientene til de lineære leddene i disse ligningene utgjør Jacobi-matrisen som vi beregnet ovenfor. Her har vi de fulle ligningene, inkludert ikkelineære ledd. De lineariserte ligningene, gyldige når u og v er små, kan vi lett løse for u og v, og for $a = 1/2$ er løsningene periodiske med vinkelfrekvens $1/\sqrt{8}$.

f) For $0 < a < 1$ finnes følgende to kvalitativt forskjellige faseportrett.
For $0 < a < 1/2$ finnes det en stabil grensesyklus, som omgir et ustabilt fikspunkt.
For $1/2 < a < 1$ finnes det ingen grensesyklus, men det nyss nevnte fikspunktet er gått over til å bli stabilt.
Maple-programmet gitt ovenfor, under punkt d), kan modifiseres så det tegner faseportrett i de to tilfellene.