# SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 7

## Strogatz, oppgave 8.3.1 (Brusselatoren)

Gitt følgende ligninger, der $a, b$ er positive parametre og $x, y \geq 0$ er dimensjonsløse variable,

$$\dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y \ , \qquad \dot{y} = bx - ax^2y \ .$$

a) Fikspunkt: ligningene $\dot{x} = \dot{y} = 0$ gir at $0 = \dot{x} + \dot{y} = 1 - x$, altså $x = 1$, og videre at $0 = \dot{y} = b - ay$, altså $y = b/a$. Det finnes bare dette ene fikspunktet. Jacobi-matrisen er

$$A = \begin{pmatrix} -b - 1 + 2axy & ax^2 \\ b - 2axy & -ax^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a \\ -b & -a \end{pmatrix} .$$

Summen av egenverdiene til matrisen er $\tau = \operatorname{Tr} A = b - 1 - a$, og produktet er $\Delta = \det A = a$. Siden $\Delta > 0$, er fortegnet på realdelen det samme for begge egenverdiene. Realdelen er positiv når $\tau = b - 1 - a > 0$, da er fikspunktet ustabilt. Og realdelen er negativ når $\tau = b - 1 - a < 0$, da er fikspunktet stabilt. Ved $\tau = b - 1 - a = 0$ har vi en Hopf-bifurkasjon: de to egenverdiene

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right) ,$$

som er komplekskonjugerte av hverandre når $\tau < 4\Delta$, skifter begge fortegn på realdelen når $\tau$ skifter fortegn.

b) Nullkliner:
Ligningen $\dot{x} = 0$ gir at

$$y = \frac{b+1}{ax} - \frac{1}{ax^2} \equiv f(x) \ .$$

Vi har at $\dot{x} > 0$ for $y > f(x)$ og $\dot{x} < 0$ for $y < f(x)$.
Ligningen $\dot{y} = 0$ gir at $x = 0$ eller

$$y = \frac{b}{ax} \equiv g(x) \ .$$

Vi har at $\dot{y} > 0$ for $y < g(x)$ og $\dot{x} < 0$ for $y > g(x)$.

Ligningen $f(x_1) = 0$ har løsningen $x_1 = 1/(b+1)$. La

$$y_1 = g(x_1) = \frac{b(b+1)}{a} \ .$$

For $x = x_1$ og $0 \leq y \leq y_1$ gjelder da at $\dot{x} > 0$. Dette kan vi ta som den ene veggen i en "trapping region" (et "bur" som systemet aldri slipper ut av når det først er kommet innenfor).
Neste vegg kan vi konstruere ved å løse bevegelsesligningen fra $(x, y) = (x_1, y_1)$ og til det punktet $(x_2, y_2)$ der vi treffer isoklinen $y = f(x)$, der $\dot{x} = 0$. Langs denne veggen er hastighetsfeltet tangensielt.
Den tredje veggen kan være en loddrett rett linje fra $(x, y) = (x_2, y_2)$ til $(x, y) = (x_2, 0)$. Langs denne linjen er $\dot{x} < 0$.
Den fjerde veggen er $x$-aksen fra $x_2$ tilbake til $x_1$, der er $\dot{y} = bx > 0$.
Vi kan ikke uten videre bruke Poincaré–Bendixson-teoremet for å konkludere at det finnes en grensesyklus innenfor dette buret, fordi det ligger et fikspunkt innenfor.

c) Vi så under punkt a) at fikspunktet $(x, y) = (1, b/a)$ er utsatt for en Hopf-bifurkasjon når $b = b_c = 1 + a$.

d) Grensesyklusen eksisterer når fikspunktet er ustabilt, dvs. når $b > b_c$. Det følger av Poincaré–Bendixson-teoremet. For å kunne bruke teoremet må vi først lage oss et bur uten fikspunkt, men det kan vi gjøre når fikspunktet er ustabilt. Vi skal bare legge en tilstrekkelig liten sirkel om fikspunktet, og ta bort det indre av sirkelen fra det buret vi konstruerte under punkt b).
Siden grensesyklusen oppstår fra fikspunktet samtidig som det blir ustabilt, vet vi at den er stabil.

e) Den tilnærmede perioden finner vi fra Jacobi-matrisen i fikspunktet, når vi setter inn den kritiske verdien $b = 1 + a$,

$$A = \begin{pmatrix} b-1 & a \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ -1-a & -a \end{pmatrix} .$$

Determinanten er $\Delta = a = \omega^2$, der $\omega$ er vinkelfrekvensen for små svingninger omkring fikspunktet, altså også den omtrentlige vinkelfrekvensen for grensesyklusen. Vi ser at $\omega = \sqrt{a}$.

Her er et Maple-program som kan vise faseportrett og nullkliner.

```
> with(DEtools):
> with(plots):
> a:=2.5: b:=4.0:
> plot1 := DEplot(
> [diff(x(t),t)=1-(b+1)*x(t)+a*x(t)^2*y(t)
> ,diff(y(t),t)=b*x(t)-a*x(t)^2*y(t)]
> ,[x(t),y(t)]
> ,t=0..50
> ,x=0..3,y=0..3.5
> ,[[x(0)=0,y(0)=0]]
> ,stepsize=0.01):
> plot2 := plot(b/(a*x),x=0.1..3,color=green):
> plot3 := plot(((b+1)/(a*x))-(1/(a*x^2)),x=0.1..3,color=blue):
> display(plot1,plot2,plot3);
```

## Strogatz, oppgave 8.4.3

Ligninger:

$$\dot{x} = \mu x + y - x^2 \qquad \dot{y} = -x + \mu y + 2x^2 \ .$$

Fikspunkt: $\dot{x} = 0$ gir at $y = x^2 - \mu x$, og $\dot{y} = 0$ gir så at

$$(\mu + 2)x^2 - (\mu^2 + 1)x = 0 \ .$$

En løsning er $x = 0$ og $y = x^2 - \mu x = 0$. Dersom $x \neq 0$, må

$$(\mu + 2)x = \mu^2 + 1 \ .$$

For $\mu = -2$ har denne ligningen ingen løsning. For $\mu \neq -2$ har den løsningen

$$x = \frac{\mu^2 + 1}{\mu + 2} \ .$$

Konklusjon:
For $\mu = -2$ har vi ett fikspunkt: $x = y = 0$.
For $\mu \neq -2$ har vi to fikspunkt: $x = y = 0$ og

$$x = \frac{\mu^2 + 1}{\mu + 2} \ , \qquad y = x(x - \mu) = \frac{(\mu^2 + 1)(1 - 2\mu)}{(\mu + 2)^2} \ .$$

Jacobi-matrisen er

$$A = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 1 \\ -1 + 4x & \mu \end{pmatrix} .$$

Den karakteristiske ligningen

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \lambda^2 - 2(\mu - x)\lambda + \mu^2 - 2\mu x + 1 - 4x \\ &= (\lambda - \mu + x)^2 - x^2 + 1 - 4x \\ &= (\lambda - \mu + x)^2 - (x + 2)^2 + 5 \ . \end{aligned}$$

har røttene

$$\lambda = \mu - x \pm \sqrt{(x + 2)^2 - 5} \ .$$

For fikspunktet $x = y = 0$ gir det at

$$\lambda = \mu \pm \mathrm{i} \ .$$

Dette fikspunktet er stabilt for $\mu < 0$ og ustabilt for $\mu > 0$, og ved $\mu = 0$ skjer det en Hopf-bifurkasjon, idet begge de to egenverdiene er komplekse. Det er nærliggende å tippe at Hopf-bifurkasjonen er superkritisk. Dersom det andre fikspunktet er ustabilt, vil det nemlig kunne hindre at en bane som divergerer bort fra origo, unnslipper mot det uendelig fjerne. I stedet fanges denne banen i nærheten av origo, slik at den ikke kan gjøre stort annet enn å konvergere mot en stabil grensesyklus.
Men vi foregriper begivenhetene, fordi vi ikke ennå har undersøkt stabiliteten til det andre fikspunktet. Vi har ovenfor funnet et eksplisitt uttrykk for egenverdiene til Jacobi-matrisen $A$, men dette uttrykket blir såpass komplisert at det faktisk er enklere å se direkte på trasen,

$$\tau = \mathrm{Tr}\, A = 2(\mu - x) = 2\left(\mu - \frac{\mu^2 + 1}{\mu + 2}\right) = \frac{2\mu - 1}{\mu + 2} \ ,$$

og determinanten,

$$\Delta = \det A = \mu^2 + 1 - 2(\mu + 2)x = -\mu^2 - 1 \ .$$

Vi ser at $\Delta < 0$, og det viser at dette fikspunktet alltid er et sadelpunkt med en positiv og en negativ egenverdi til Jacobi-matrisen.

Den homokline bifurkasjonen det spørres etter i oppgaven, må inntreffe for en positiv verdi av $\mu$, ved at den grensesyklusen omkring origo som oppstår ved $\mu = 0$, vokser seg så stor at den blir til en homoklin bane som konvergerer mot sadelpunktet både for $t \to -\infty$ og $t \to +\infty$.

For å studere dette numerisk kan f.eks. følgende Maple-program brukes. For en gitt numerisk verdi av parameteren $\mu$ beregner vi det ustabile fikspunktet $(x_f, y_f)$, der $x_f = (\mu^2+1)/(\mu+2)$ og $y_f = x_f(x_f - \mu)$, videre den positive egenverdien til Jacobi-matrisen, $\lambda_1 = \mu - x_f \pm \sqrt{(x_f+2)^2 - 5}$ og den tilhørende egenvektoren $(u, v)$, definert ved at

$$\begin{pmatrix} \mu - 2x & 1 \\ -1 + 4x & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

som gir $v = (\lambda_1 - \mu + 2x_f)u$. Vi velger vilkårlig $u = 1$. For å finne den ene grenen av den ustabile mangfoldigheten til fikspunktet $(x_f, y_f)$ starter vi den numeriske integrasjonen med $(x, y) = (x_f + \epsilon u, y_f + \epsilon v)$, der $\epsilon$ er liten. Her må vi velge $\epsilon$ negativ, ellers går vi ut i feil retning.

```
> with(DEtools):
> mu := 0.01;
> xf := (mu^2+1)/(mu+2);
> yf := xf*(xf-mu);
> epsilon := -0.001;
> lambda1 := mu-xf+sqrt((xf+2)^2-5);
> u := 1;
> v := (lambda1-mu+2*xf)*u;
> DEplot(
> [diff(x(t),t)=mu*x(t)+y(t)-x(t)^2
> ,diff(y(t),t)=-x(t)+mu*y(t)+2*x(t)^2]
> ,[x(t),y(t)]
> ,t=0..30
> ,x=-0.4..0.7,y=-0.3..0.4
> ,[[x(0)=xf+epsilon*u,y(0)=yf+epsilon*v]]
> ,stepsize=0.01
> );
```

## Strogatz, oppgave 8.5.2

Ligningen for en pendel som drives med et konstant kraftmoment, har følgende form etter skalering slik at tiden $t$ er dimensjonsløs,

$$\ddot{\phi} + \alpha\dot{\phi} + \sin\phi = I \ .$$

Her er $\phi$ en fasevariabel, dvs. at $\phi$ og $\phi + 2\pi$ representerer samme fysiske tilstand. Videre er $\alpha$ og $I$ dimensjonsløse parametre, $\alpha$ representerer dempningen og $I$ det konstante ytre kraftmomentet. Vi antar at $\alpha > 0$.

Fikspunkt: dersom $\phi$ er konstant, må $\sin\phi = I$, og det er bare mulig dersom $|I| \leq 1$. For $-1 < I < 1$ finnes det to fikspunkt, det ene stabilt og det andre ustabilt. For $I > 1$ finnes det en stabil grensesyklus og ingen fikspunkt. Ved $I = 1$ oppstår de to fikspunktene sammen i en sadel-knutepunkt-bifurkasjon.

Ved en kritisk verdi $I = I_1 < 1$, som avhenger av $\alpha$, vil den stabile grensesyklusen gå over til å bli en homoklin bane for det ustabile fikspunktet. Det vil si at den forsvinner i en homoklin bifurkasjon (eller oppstår, avhengig av om vi er i ferd med å skru verdien av $I$ ned eller opp).

I intervallet $I_1 < I < 1$ er pendelen bistabil: det eksisterer både et stabilt fikspunkt og en stabil grensesyklus. Dersom vi gjør $\alpha$ større, blir etter hvert intervallet fra $I_1$ til $I$ så lite at det blir usynlig både i eksperiment og i numeriske integrasjoner av bevegelsesligningen. Den bifurkasjonen der grensesyklusen forsvinner, vil da i praksis se ut som en undelig-periode-bifurkasjon, der et stabilt og et ustabilt fikspunkt oppstår samtidig.

Denne numeriske øvingsoppgaven illustrerer forskjellen mellom matematikk og fysikk. Matematisk sett finnes det et bistabilt intervall $I_1 < I < 1$ for enhver verdi av $\alpha$, men fysisk sett eksisterer ikke dette intervallet når $\alpha$ er stor, fordi det er så lite at det er usynlig. Vel å merke: dette er noe jeg *tror*, jeg har ikke noe bevis for påstanden.

## Strogatz, oppgave 8.6.5

Maple-eksempel:

```
> omega := 5/3;
> plot([(sin(t),sin(omega*t)),t=0..400]);
```

## Strogatz, oppgave 8.6.7

Newtons bevegelsesligninger for en partikkel med masse $m$ i to dimensjoner, påvirket av en konstant kraft $k$ i retning inn mot origo, er:

$$m\ddot{x} = -k\,\frac{x}{r}\;, \qquad m\ddot{y} = -k\,\frac{y}{r}\;.$$

Sett $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, da er

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\;, \qquad & \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta\;, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\;, \qquad & \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta\;. \end{aligned}$$

Av Newtons ligninger får vi at

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = -kr\;, \qquad m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = 0\;.$$

Den siste ligningen sier rett og slett at dreieimpulsen $h$ er bevart, $\dot{h} = 0$, der

$$h = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\theta}\;.$$

Videre er

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = mr(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mr\ddot{r} - \frac{h^2}{mr^2}\;,$$

slik at den gjenværende ligningen blir:

$$m\ddot{r} - \frac{h^2}{mr^3} = -k\;.$$

En litt annen utledning av denne ligningen er å derivere relasjonen $r^2 = x^2 + y^2$, det gir at

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}\;, \qquad r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\;,$$

og følgelig

$$\ddot{r} = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{r} + r\dot{\theta}^2 \; .$$

Vi har hermed utledet de oppgitte ligningene

$$m\ddot{r} = \frac{h^2}{mr^3} - k \; , \qquad \dot{\theta} = \frac{h}{mr^2} \; .$$

a) Ansatsen $r = r_0 =$ konstant gir at

$$h = \pm\sqrt{mkr_0^{\,3}} \; ,$$

og dermed, hvis vi her velger fortegnet $+$,

$$\dot{\theta} = \omega_\theta = \frac{h}{mr_0^{\,2}} = \sqrt{\frac{k}{mr_0}} \; .$$

Vi ser at en slik sirkulær løsning eksisterer for en vilkårlig verdi av radien $r_0$.

b) Dette er et tredimensjonalt system, slik ligningene er formulert, fordi vi har en andreordens og en førsteordens differensialligning. Men i tillegg til dreieimpulsen $h$ vet vi av erfaring at i et slikt mekanisk system er også energien $E$ en bevegelseskonstant, og ved hjelp av den kan vi integrere den andreordens radialligningen til en førsteordens ligning. Vi multipliserer ligningen med hastigheten $\dot{r}$, og integrerer, det gir ligningen

$$\frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2mr^2} + kr = E \; .$$

For den sirkulære banen med radius $r_0$ er energien

$$E_0 = \frac{h^2}{2mr_0^{\,2}} + kr_0 = \frac{mkr_0^{\,3}}{2mr_0^{\,2}} + kr_0 = \frac{3}{2}\,kr_0 \; .$$

For at partikkelen skal oscillere omkring sirkelbanen, må $\dot{r} \neq 0$ samtidig som $r = r_0$, og det gir en energi $E > E_0$. Hvis vi setter $r = r_0 + u$ og antar at $u$ er liten, får vi at

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\,m\dot{u}^2 + \frac{h^2}{2m(r_0+u)^2} + k(r_0+u) \\
&= \frac{1}{2}\,m\dot{u}^2 + mkr_0^{\,3}\left(\frac{1}{2mr_0^{\,2}} - \frac{u}{mr_0^{\,3}} + \frac{3u^2}{2mr_0^{\,4}} + \cdots\right) + k(r_0+u) \\
&\approx E_0 + \frac{1}{2}\,m\dot{u}^2 + \frac{3ku^2}{2r_0} \; .
\end{aligned}$$

Vi kan derivere denne ligningen, der $E$ og $E_0$ er konstanter, da får vi en lineær bevegelsesligning for $u$, som vi kan løse. Men problemet er velkjent nok til at vi kan sette opp svaret uten mer regning. Vi har rett og slett en harmonisk oscillator med en vinkelfrekvens $\omega_r$ som er gitt av at den potensielle energien $3ku^2/(2r_0)$ skal kunne skrives som $m\omega_r^{\,2}u^2/2$. Det gir at

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3k}{mr_0}} \; .$$

c) Vi finner et irrasjonalt forhold

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{3}\ ,$$

som betyr at de små oscillasjonene omkring en konstant radius er kvasiperiodiske. Med andre ord: hvis partikkelen ikke går i sirkelbane, er bevegelsen ikke periodisk. Men konklusjonen gjelder strengt tatt bare for infinitesimalt små oscillasjoner, alle oscillasjoner med endelig stor amplitude er faktisk ikkelineære og har en frekvens som avhenger av amplituden! Da kan forholdet mellom frekvensene likevel bli rasjonalt.

Igjen er det altså forskjell mellom fysikk og matematikk. I praksis blir spørsmålet ikke om bevegelsen er kvasiperiodisk, men om den ser kvasiperiodisk ut. Og det avhenger av hvor godt et irrasjonalt tall som $\sqrt{3}$ kan tilnærmes av rasjonale tall. Faktisk er nettopp irrasjonale kvadratrøtter av rasjonale tall de irrasjonale tallene som er "mest irrasjonale", i den forstand at de kan tilnærmes dårligst av rasjonale tall. Hvis vi prøver å tilnærme $\sqrt{3}$ med et rasjonalt tall $m/n$, kan vi gjøre det på en slik måte at feilen går mot null som $1/n^2$ når $n \to \infty$. Det høres kanskje overraskende bra ut, for hvis vi velger telleren $n$ vilkårlig, kan vi jo ikke vente å oppnå bedre nøyaktighet enn $1/n$. Ved å velge $n$ optimalt, kan vi oppnå $1/n^2$. Men dette er rett og slett dårlig, fordi et såkalt "normalt" irrasjonalt tall kan tilnærmes med en nøyaktighet på $1/n^3$. Nesten alle reelle tall er irrasjonale og normale, i den forstand at mengden av alle andre reelle tall har mål null.

Vi konkluderer altså at en bevegelse som teoretisk sett er kvasiperiodisk med et forhold mellom de to frekvensene på $\sqrt{3}$, faktisk vil se kvasiperiodisk ut, fordi $\sqrt{3}$ er "maksimalt irrasjonalt" og ikke kan tilnærmes særlig godt med rasjonale tall.

d) Bevegelsen er aldri kaotisk, fordi vi har to bevegelseskonstanter $h$ og $E$, og ved å innføre dem kan vi integrere bevegelsligningene til to førsteordens autonome (ikke eksplisitt tidsavhengige) ligninger. Dermed har vi et todimensjonalt system, og kaos kan ikke forekomme i to dimensjoner.

e) En mekanisk realisering? Vi trenger et system med en potensiell energi som øker proporsjonalt med radien. F.eks. en liten kule som ruller friksjonsfritt på en kjegleformet flate i et konstant gravitasjonsfelt, når vi neglisjerer den kinetiske energien som skyldes rotasjon av kula om sin egne akse.