SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 8

Strogatz, oppgave 9.1.4

Maxwell–Bloch-ligningene for en laser:

$$\dot{E} = \kappa(P - E) \;, \qquad \dot{P} = \gamma_1(ED - P) \;, \qquad \dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP) \;.$$

E er elektrisk felt, P er polarisering av atomene, D er populasjonsinversion (forholdet mellom antallet atomer i den eksiterte tilstanden og i grunntilstanden??), mens de greske bokstavene betegner konstanter. κ, γ_1 og γ_2 er positive dempningskonstanter, mens λ er en "pumpeparameter" som kan være positiv, negativ eller null.

Fikspunkt:
$\dot{E} = 0$ er ekvivalent med at $P = E$.
Dernest er $\dot{P} = 0$ er ekvivalent med at enten $P = E = 0$ eller $D = 1$.
For $P = E = 0$ er $\dot{D} = 0$ ekvivalent med at $D = \lambda + 1$.
For $D = 1$ er $\dot{D} = 0$ ekvivalent med at $\lambda(1 - EP) = \lambda(1 - E^2) = 0$, som igjen betyr at enten $\lambda = 0$ eller $P = E = \pm 1$.
Oppsummering av fikspunkt:
For en vilkårlig λ har vi tre fikspunkt: $D = \lambda + 1$, $P = E = 0$, og $D = 1$, $P = E = \pm 1$.
Dersom $\lambda = 0$, er $D = 1$, $P = E =$ vilkårlig, en enparameter-familie av fikspunkt som inkluderer de tre nyss nevnte fikspunktene.

For den lineære stabilitetsanalysen av fikspunktene må vi studere egenverdiene til Jacobimatrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{E}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial D} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial D} \\ \frac{\partial \dot{D}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \gamma_1 D & -\gamma_1 & \gamma_1 E \\ -\gamma_2 \lambda P & -\gamma_2 \lambda E & -\gamma_2 \end{pmatrix} .$$

a) Vi er først interessert i det fikspunktet der laseren ikke "laser", dvs. der $E = P = 0$ og $D = \lambda + 1$. Der har vi Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \gamma_1(\lambda + 1) & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} .$$

Denne 3×3-matrisen er blokkdiagonal: langs diagonalen finner vi en 2×2-matrise

$$B = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa \\ \gamma_1(\lambda + 1) & -\gamma_1 \end{pmatrix} ,$$

og en 1×1-matrise $-\gamma_2$. Den siste er en egenverdi til matrisen A, de to andre egenverdiene til A er egenverdiene til B.
Egenverdien $-\gamma_2$ er negativ, og det betyr at den tilhørende egenvektoren, som peker langs D-aksen i det tredimensjonale (E, P, D)-rommet, er en stabil retning.
Summen av de to andre egenverdiene er også negativ, den er nemlig lik trasen til matrisen B, og $\operatorname{Tr} B = -\kappa - \gamma_1 < 0$. Produktet av de to egenverdiene er

$$\det B = -\kappa \gamma_1 \lambda \;.$$

Vi ser at for $\lambda < 0$ er $\det B > 0$, da har de to egenverdiene samme fortegn på realdelen, og siden summen av egenverdiene er negativ, har begge negativ realdel, slik at fikspunktet er stabilt.
For $\lambda > 0$, derimot, er $\det B < 0$, da er de to egenverdiene reelle og har motsatt fortegn, slik at fikspunktet er ustabilt. Det er et tredimensjonalt sadelpunkt, med en positiv og to negative egenverdier.

Om vi nå går til de to andre fikspunktene som finnes for $\lambda \neq 0$, nemlig $D = 1$, $E = P = \pm 1$, så har vi der Jacobi-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa & 0 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 & \gamma_1 E \\ -\gamma_2 \lambda E & -\gamma_2 \lambda E & -\gamma_2 \end{pmatrix} ,$$

altså med enten $E = 1$ eller $E = -1$. Den karakteristiske ligningen er, når vi kaller den ukjente egenverdien for α,

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \alpha I) &= \begin{vmatrix} -\kappa - \alpha & \kappa & 0 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 - \alpha & \gamma_1 E \\ -\gamma_2 \lambda E & -\gamma_2 \lambda E & -\gamma_2 - \alpha \end{vmatrix} \\ &= -\alpha^3 - (\kappa + \gamma_1 + \gamma_2)\alpha^2 - (\kappa + \gamma_1 + \gamma_1 \lambda)\gamma_2 \alpha - 2\kappa\gamma_1\gamma_2\lambda \, . \end{aligned}$$

For $\lambda = 0$ kan vi løse ligningen for α, da er $\alpha = 0$ en egenverdi, og de to andre egenverdiene er røtter i andregradsligningen

$$\alpha^2 + (\kappa + \gamma_1 + \gamma_2)\alpha + (\kappa + \gamma_1)\gamma_2 = 0 \, ,$$

de er altså

$$\alpha = \frac{-\kappa - \gamma_1 - \gamma_2 \pm \sqrt{(\kappa + \gamma_1 + \gamma_2)^2 - 4(\kappa + \gamma_1)\gamma_2}}{2} = \frac{-\kappa - \gamma_1 - \gamma_2 \pm (\kappa + \gamma_1 - \gamma_2)}{2} \, ,$$

dvs. at de er $\alpha = -\kappa - \gamma_1$ og $\alpha = -\gamma_2$, begge negative. Dette gjelder for $\lambda = 0$. Men egenverdiene til matrisen A varierer kontinuerlig med λ, og derfor kan vi slutte at de to egenverdiene har negativ realdel for verdier av λ innenfor et intervall omkring den kritiske verdien null.
Produktet av de tre egenverdiene til matrisen A er determinanten til A,

$$\det A = -2\kappa\gamma_1\gamma_2\lambda \, .$$

Siden produktet av to av egenverdiene er positivt, også for $\lambda \neq 0$ men nær null, konkluderer vi at den egenverdien som er null for $\lambda = 0$, er negativ for $\lambda > 0$ og positiv for $\lambda < 0$. Det betyr at de to fikspunktene begge er stabile for $\lambda > 0$ og ustabile for $\lambda < 0$. De blir altså stabile samtidig som det tredje fikspunktet blir ustabilt. Dette ligner sterkt på en høygaffelbifurkasjon.

Vi kunne vente å finne en høygaffelbifurkasjon, siden bevegelsesligningene våre har en refleksjons-symmetri: de er invariante under et samtidig fortegnskifte på E og P. Men som høygaffelbifurkasjon betraktet har denne et par spesielle særtrekk. For det første er det ikke slik her at de to fikspunktene som overtar stabiliteten til det tredje, vokser kontinuerlig ut av det tredje. For det andre eksisterer alle tre fikspunktene for alle verdier av kontrollparameteren λ. For det tredje så er den kritiske parameterverdien $\lambda = 0$ spesiell på den måten at der har vi ikke bare tre fikspunkt, men en kontinuerlig linje av fikspunkt.

Disse observasjonene antyder at bifurkasjonen kanskje vil se mer normal ut om vi går over til andre variable, f.eks. definerer $\epsilon = \sqrt{|\lambda|}E$ og $p = \sqrt{|\lambda|}P$. Det gir ligningene

$$\dot{\epsilon} = \kappa(p - \epsilon) \ , \qquad \dot{p} = \gamma_1(\epsilon D - p) \ , \qquad \dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - \eta\epsilon p) \ ,$$

der parameteren $\eta = \lambda/|\lambda| = \pm 1$ varierer diskontinuerlig ved $\lambda = 0$. Diskontinuerlig avhengighet av kontrollparametre faller utenfor det vanlige klassifikasjons-skjemaet vårt. Om vi tillater diskontinuiteter, kan alt skje!

b) Vi skal finne sammenhengen mellom Maxwell–Bloch-ligningene

$$\dot{E} = \kappa(P - E) \ , \qquad \dot{P} = \gamma_1(ED - P) \ , \qquad \dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP) \ .$$

og Lorenz-ligningene

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \ , \qquad \dot{y} = rx - y - xz \ , \qquad \dot{z} = xy - bz \ .$$

Legg først merke til at ligningene for E og for x er de eneste av de 6 ligningene som er lineære, allerede det antyder at vi bør prøve med å sette $E = \alpha x$, med en skaleringskonstant α. Denne ansatsen bekreftes av at E opptrer i begge de kvadratiske leddene i Maxwell–Bloch-ligningene, på tilsvarende måte som x opptrer i de kvadratiske leddene i Lorenz-ligningene.

Den riktige bevegelsesligningen for x får vi deretter ved å sette $P = \alpha y$.

For generelle parameterverdier har Lorenz-ligningene et fikspunkt $x = y = z = 0$, foruten de to fikspunktene $z = r - 1$, $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ som eksisterer bare dersom $b(r-1) \geq 0$. Det første må svare til $E = P = 0$, $D = \lambda + 1$, mens de to andre må svare til $E = P = \pm 1$, $D = 1$. Det er da fristende å anta at

$$D = \lambda + 1 - \frac{\lambda z}{r - 1} \ ,$$

slik at $z = 0$ gir $D = \lambda + 1$ og $z = r - 1$ gir $D = 1$. Etter dette resonnementet burde vi også sette

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{b(r-1)}} \ ,$$

slik at $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ gir $E = P = \pm 1$.

Prøver vi å sette inn i Maxwell–Bloch-ligningene, får vi da at

$$\alpha\dot{x} = \kappa\alpha(y - x) \ , \qquad \alpha\dot{y} = \gamma_1\alpha\left(x\left(\lambda + 1 - \frac{\lambda z}{r-1}\right) - y\right) \ ,$$

$$-\frac{\lambda}{r-1}\,\dot{z} = \gamma_2\left(\frac{\lambda z}{r-1} - \lambda\alpha^2 xy\right) \ .$$

Eller, etter litt forenkling, og innsatt $\alpha^2 = 1/(b(r-1))$,

$$\dot{x} = \kappa(y - x) \ , \quad \dot{y} = \gamma_1\left((\lambda + 1)x - y - \frac{\lambda xz}{r-1}\right) \ ,$$

$$\dot{z} = \gamma_2(-z + (r-1)\alpha^2 xy) = \gamma_2 \left(-z + \frac{xy}{b}\right) .$$

Husk at vi her står fritt til å velge b og r, og dessuten skalere tiden t. Vi setter $t = \gamma_1 \tau$, fordi det gir den ønskete formen på bevegelsesligningen for y. Det gir ligningene

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\kappa}{\gamma_1}(y - x) , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = (\lambda+1)x - y - \frac{\lambda xz}{r-1} , \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(-z + \frac{xy}{b}\right) .$$

Dette er Lorenz-ligningene med parametre

$$\sigma = \frac{\kappa}{\gamma_1} , \qquad r = \lambda + 1 , \qquad b = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} .$$

Strogatz, oppgave 9.2.6

Rikitakes modell for reverseringer av jordmagnetfeltet, med a og ν konstante, $\nu > 0$:

$$\dot{x} = -\nu x + zy \qquad \dot{y} = -\nu y + (z-a)x \qquad \dot{z} = 1 - xy .$$

Havbunnen både i Atlanterhavet og i Stillehavet på begge sidene av en sprekk midt i havet beveger seg bort fra denne sprekken. I sprekken kommer flytende lava opp og lager ny havbunn. Idet lavaen størkner, fryses det inn i steinen et lite permanent magnetfelt langs jordmagnetfeltet. Dette feltet snur retning mange ganger når en måler langs en linje utover fra sprekken, og siden alderen på fjellet øker langs en slik linje, tolkes det slik at jordmagnetfeltet har snudd retning mange ganger bare i løpet av de siste hundre tusen årene.

a) At Rikitakes modell er dissipativ, kan vi f.eks. vise ved å vise at divergensen av hastighetsfeltet er negativ,

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\nu - \nu + 0 = -2\nu < 0 .$$

Siden divergensen er konstant lik -2ν, vil ethvert faseromsvolum V reduseres eksponensielt med tiden t, som $V(t) = V(0)\,\mathrm{e}^{-2\nu t}$. Det følger av at

$$\dot{V} = \int_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}\right) = -2\nu V .$$

b) Fikspunkt: vi ser at $\dot{z} = 0$ hvis og bare hvis $xy = 1$. Ligningene $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ betyr at

$$-\nu x + zy = 0 \qquad (z-a)x - \nu y = 0 .$$

Siden $x = 0$, $y = 0$ gir $\dot{z} = 1$ og altså ikke noe fikspunkt, må determinanten til ligningssystemet være null for at vi skal få et fikspunkt, altså

$$\nu^2 - z(z-a) = 0 .$$

Det vil si at

$$z = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 4\nu^2}\right) .$$

Når denne betingelsen er oppfylt, er det tilstrekkelig å oppfylle bare den ene av de to ligningene $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$. Velg f.eks. den første av de to, $-\nu x + zy = 0$, multipliser den med x og bruk at $xy = 1$, det gir at $-\nu x^2 + z = 0$. For at denne ligningen skal kunne oppfylles, må $z \geq 0$, og det vil si at vi må ha

$$z = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4\nu^2}\right).$$

Da har vi at

$$x = \pm\sqrt{\frac{z}{\nu}} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4\nu^2}}{2\nu}}\,, \qquad y = \frac{1}{x} = \pm\sqrt{\frac{z - a}{\nu}} = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4\nu^2}}{2\nu}}\,.$$

Det finnes to fikspunkt, med enten $x > 0$, $y > 0$ eller $x < 0$, $y < 0$.

Her har vi funnet fikspunktene eksplisitt. Strogatz foreslår en parametrisk form for løsning: sett $x = \pm k$, foreløpig uten å bestemme k eksplisitt. Da er, som vi har sett, $z = \nu x^2 = \nu k^2$ og $y = 1/x = \pm 1/k$, og dessuten er $\nu^2 - z(z - a) = 0$, som gir at

$$a = z - \frac{\nu^2}{z} = \nu\left(k^2 - \frac{1}{k^2}\right).$$

c) Vi ser på den lineære stabiliteten til fikspunktene. Jacobi-matrisen er

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & z & y \\ z - a & -\nu & x \\ -y & -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu & \nu x^2 & \frac{1}{x} \\ \frac{\nu}{x^2} & -\nu & x \\ -\frac{1}{x} & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan jo prøve oss på den karakteristiske ligningen, som bestemmer egenverdiene λ,

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\nu - \lambda & z & y \\ z - a & -\nu - \lambda & x \\ -y & -x & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 2\nu\lambda^2 - (x^2 + y^2 + \nu^2 - z(z - a))\lambda - \nu(x^2 + y^2) - xy(2z - a) \\ &= -\lambda^3 - 2\nu\lambda^2 - \frac{\sqrt{a^2 + 4\nu^2}}{\nu}\lambda - 2\sqrt{a^2 + 4\nu^2} \\ &= -(\lambda + 2\nu)\left(\lambda^2 + \frac{\sqrt{a^2 + 4\nu^2}}{\nu}\right). \end{aligned}$$

Vi ser at vi alltid har en negativ egenverdi, $\lambda = -2\nu$, og to rent imaginære,

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt[4]{a^2 + 4\nu^2}}{\sqrt{\nu}}\,.$$

Det betyr at vi ikke er i stand til å avgjøre spørsmålet om stabilitet av fikspunktene uten å gå ut over den lineære stabilitetsanalysen. Vi stopper der.

Strogatz, oppgave 9.3.1

Gitt ligningene $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, der θ_1 og θ_2 er fasevariable, f.eks. med periode 2π, slik at θ_i og $\theta_i + 2\pi$ representerer samme fysiske tilstand, og der ω_1 og ω_2 er konstante vinkelhastigheter med et irrasjonalt forhold ω_1/ω_2.

Dette systemet er ikke kaotisk, fordi en bane ikke avhenger følsomt av startbetingelsene. Vi kan løse bevegelsesligningene eksplisitt, vi har at

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \omega_1 t \ , \qquad \theta_2(t) = \theta_2(0) + \omega_2 t \ .$$

Startbetingelsene $\theta_1(0) = a$, $\theta_2(0) = b$ gir en bane

$$\theta_1(t) = \theta_{1(a,b)}(t) = a + \omega_1 t \ , \qquad \theta_2(t) = \theta_{2(a,b)}(t) = b + \omega_2 t \ .$$

Startbetingelsene $\theta_1(0) = c$, $\theta_2(0) = d$ gir i stedet en bane

$$\theta_1(t) = \theta_{1(c,d)}(t) = c + \omega_1 t \ , \qquad \theta_2(t) = \theta_{2(c,d)}(t) = d + \omega_2 t \ .$$

Forskjellen mellom de to banene ved tiden t er

$$\theta_{1(c,d)}(t) - \theta_{1(a,b)}(t) = c - a \ , \qquad \theta_{2(c,d)}(t) - \theta_{2(a,b)}(t) = d - b \ .$$

Forskjellen er uavhengig av t, og i hvert fall vokser den ikke eksponensielt. Etter definisjonen på Liapunov-eksponenter betyr det at alle Liapunov-eksponentene, både den største og den minste, er lik null. Kaos forutsetter minst en positiv Liapunov-eksponent.

Strogatz, oppgave 9.3.2,3,4,5,6,7; 9.5.4

Eksempel på Maple-program:

```
> with(DEtools):
> sigma:=10: b:=8.0/3: r:=24.5:
> DEplot(
> [diff(x(t),t)=sigma*(y(t)-x(t))
> ,diff(y(t),t)=r*x(t)-y(t)-x(t)*z(t)
> ,diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t)]
> ,[x(t),y(t),z(t)]
> ,t=0..10
> ,[[x(0)=1.01,y(0)=2.02,z(0)=4.03]]
> ,scene=[y,z]
> ,stepsize=0.01
> );
```

Strogatz, oppgave 9.3.8

Gitt bevegelsesligningene $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$.
De er to uavhengige ligninger, som definerer et vektorfelt i planet når vi forutsetter at $r \geq 0$ og tolker (r, θ) som polarkoordinater i planet.
Ligningen $\dot{r} = r(1 - r^2)$ har $r = 0$ som et ustabilt fikspunkt og $r = 1$ som et stabilt fikspunkt.
La D være enhetsskiven, som består av alle punkter i planet med $r \leq 1$.

Da er D en *lukket* mengde: ethvert punkt i planet som ikke er med i D, har en positiv avstand til D (avstanden til D er den nedre grensen for avstanden til et vilkårlig punkt i D).
Videre er D en *invariant* mengde: hvis $r \leq 1$ ved ett tidspunkt, forblir $r \leq 1$ ved alle senere tidspunkt.
D tiltrekker en åpen mengde av startpunkter, den tiltrekker nemlig et hvilket som helst startpunkt. En mengde er åpen dersom ethvert punkt i mengden har en $\epsilon > 0$ slik at en sirkel om punktet med radius ϵ ligger innenfor mengden.
D er ikke en attraktor, fordi den inneholder to invariante ekte delmengder, nemlig det ustabile fikspunktet $r = 0$ (origo) og enhetssirkelen $r = 1$, som er en stabil grensesyklus. En ekte delmengde er en delmengde som ikke er hverken nullmengden eller hele mengden.
Enhetssirkelen er en attraktor: den er en minimal invariant mengde (minimal fordi ingen ekte delmengde av den er invariant), og det finnes en åpen mengde av startpunkter som tiltrekkes av den: det gjør alle punktene i planet så nær som origo. Det vil si at hele planet minus origo er nedslagsfeltet til denne attraktoren.