SIF 4088 Ikkelineær dynamikk, høst 2001, løsning oppgave 9

Strogatz, oppgave 10.1.12 og 13

Newtons metode for å løse numerisk en ligning av formen $g(x) = 0$: start med en tilnærmet løsning x_0 og iterer avbildningen

$$x_n \mapsto x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{der} \qquad f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \; .$$

Denne metoden fungerer selvsagt bare der funksjonen g er deriverbar og dessuten $g'(x) \neq 0$.
Det er opplagt at x_* er et fikspunkt for denne avbildningen hvis og bare hvis $g(x_*) = 0$.
Det er også opplagt at hvis g er minst to ganger deriverbar i punktet x_* og dessuten $g'(x_*) \neq 0$, så er fikspunktet superstabilt. Vi har nemlig at

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)}{g'(x)} + \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} \; ,$$

og følgelig $f'(x_*) = 0$.

Strogatz, oppgave 10.3.3

Vi skal studere avbildningen

$$x_{n+1} = \frac{rx_n}{1 + x_n^2} \equiv f(x_n) \; .$$

Vi behøver ikke nødvendigvis begrense oss til parameterverdier $r > 0$.

Ett fikspunkt er $x = 0$. To andre fikspunkt dersom $r > 1$, er $x = \pm\sqrt{r-1}$. Flere fikspunkt finnes ikke.

For å lære om stabiliteten av fikspunktene, deriverer vi,

$$f'(x) = \frac{r}{1+x^2} - \frac{2rx^2}{(1+x^2)^2} = \frac{r(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \; .$$

Merk at for $r \neq 0$ er $f'(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = \pm 1$, og disse to punktene er et globalt maksimum og et globalt minimum for $f(x)$. Ekstremalverdiene er

$$f(\pm 1) = \pm \frac{r}{2} \; .$$

Uansett startpunkt, og uansett verdien av r, kommer vi innenfor intervallet $[-|r|/2, |r|/2]$ etter den første iterasjonen, og siden blir vi innenfor dette intervallet.

Siden $f'(0) = r$, er fikspunktet $x = 0$ stabilt for $|r| < 1$ og ustabilt for $|r| > 1$. Det er også stabilt for $r = \pm 1$, det innser vi ved å "tegne spindelveven", altså skissere grafen til funksjonen $f(x)$ og studere iterasjonsprosedyren grafisk.

For fikspunktene $x = \pm\sqrt{r-1}$, som eksisterer for $r > 1$, har vi at

$$f'(x) = \frac{r(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{r(2-r)}{r^2} = \frac{2-r}{r} = \frac{2}{r} - 1 \; .$$

Siden $r > 1$ her, vil alltid $-1 < f'(x) < 1$ i fikspunktene, det viser at disse to fikspunktene alltid er stabile.

For $r > 1$ er langtidsoppførselen grei, da vil enhver $x_0 > 0$ ende opp i fikspunktet $\sqrt{r-1}$, enhver $x_0 < 0$ ender opp i fikspunktet $-\sqrt{r-1}$, mens $x_0 = 0$ gir $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots = 0$.

For $-1 \leq r \leq 1$ er langtidsoppførselen enda greiere, da vil ethvert startpunkt x_0 ende opp i fikspunktet 0.

For $r < -1$ er saken mindre grei, for det eneste fikspunktet, som er $x = 0$, er da ustabilt. Siden det blir ustabilt idet $f'(0) = r = -1$, er det naturlig å tippe at når r avtar fra $r = -1$, får vi en periodedoblingskaskade, som ender opp i kaos. Men slik går det ikke. Vi har nemlig at den itererte funksjonen er

$$f^2(x) \equiv f(f(x)) = \frac{rf(x)}{1 + (f(x))^2} = \frac{\dfrac{r^2 x}{1+x^2}}{1 + \dfrac{r^2x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{r^2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2 + r^2x^2} \ .$$

Her inngår bare r^2, det er altså ingen forskjell på positive og negative verdier av r. Vi vet at for $r > 1$ vil iterasjonene konvergere mot et av fikspunktene $\pm\sqrt{r-1}$, unntatt hvis vi starter med $x = 0$. Men det betyr at for $r < -1$ vil iterasjon av f^2 konvergere mot enten $\sqrt{|r|-1}$ eller $-\sqrt{|r|-1}$. Dette fikspunktet for f^2 er en stabil to-syklus for avbildningen f.

Konklusjon: ved $r = -1$ skjer det en periodedobling. Men når r avtar videre fra $r = -1$, er to-syklusen alltid stabil og vi kommer aldri til den neste periodedoblingen. Det blir aldri noe kaos, hverken for positive eller negative verdier av kontrollparameteren r.

Strogatz, oppgave 10.3.4

Gitt den kvadratiske avbildningen

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \equiv f(x_n) \ ,$$

der c er en konstant. Vi antar her at både x og c er reelle.

Et fikspunkt x er en løsning av ligningen $x = x^2 + c$, dvs.

$$x = x_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4c}\right) .$$

For $c < 1/4$ er det to fikspunkt, for $c = 1/4$ er det ett, og for $c > 1/4$ er det ingen.

Den deriverte av avbildningen i fikspunktene $x_\pm$ er

$$f'(x_\pm) = 2x_\pm = 1 \pm \sqrt{1-4c} \ .$$

Fikspunktet x_+ er ustabilt når det eksisterer, mens fikspunktet x_- er stabilt for $-3/4 < c < 1/4$ og ustabilt for $c < -3/4$.

De to fikspunktene oppstår ved $c = 1/4$ i en sadel-knutepunktbifurkasjon, i motsetning til den logistiske avbildningen der det skjer en transkritisk bifurkasjon.

En to-syklus består av to punkter p og q slik at

$$q = p^2 + c \ , \qquad p = q^2 + c \ .$$

Vi har da at

$$p - q = (q^2 + c) - (p^2 + c) = (q-p)(q+p) \ .$$

For en to-syklus må vi ha at $p \neq q$, og da må

$$q + p = -1 \ .$$

Vi har da videre at

$$-1 = q + p = p^2 + q^2 + 2c = p^2 + (-1-p)^2 + 2c = 2p^2 + 2p + 1 + 2c \ ,$$

dvs.

$$p^2 + p + 1 + c = 0 \ ,$$

og det gir at

$$p = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4(1+c)}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3-4c}\right) \ .$$

Det er likegyldig om vi velger det ene eller andre fortegnet, vi kan velge f.eks.

$$p = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{-3-4c}\right) \ , \qquad q = -1 - p = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{-3-4c}\right) \ .$$

To-syklusen eksisterer for $c < -3/4$, og den oppstår ved $c = -3/4$ av fikspunktet x_- i en periodedobling.

Stabiliteten til to-syklusen er gitt av den deriverte

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}f(f(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=p} &= f'(f(p))\,f'(p) = f'(q)\,f'(p) = (2q)(2p) \\ &= \left(-1 - \sqrt{-3-4c}\right)\left(-1 + \sqrt{-3-4c}\right) = 4(1+c) \ . \end{aligned}$$

Det samme resultatet kan vi regne ut også på en litt snedigere måte, ved å bruke at $p+q = -1$, samt at $q^2 = p - c$ og $p^2 = q - c$:

$$4pq = 2((p+q)^2 - p^2 - q^2) = 2((p+q)^2 - (p+q) + 2c) = 4(1+c) \ .$$

To-syklusen er stabil for $-1 < 4(1+c) < 1$, dvs. for $-5/4 < c < -3/4$.

Strogatz, oppgave 10.3.5

Gitt den logistiske avbildningen $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Definer y slik at $x = ay + b$. Vi skal velge konstantene a og b slik at $y_{n+1} = y_n^2 + c$ for en eller annen verdi av konstanten c.

Vi setter enkelt og greit inn i den logistiske avbildningen:

$$ay_{n+1} + b = r(ay_n + b)(1 - ay_n - b) = -ra^2y_n^2 + ra(1-2b)y_n + rb(1-b) \ .$$

Vi multipliserer ligningen med $-r$:

$$-ray_{n+1} = (-ray_n)^2 + r(1-2b)(-ray_n) - rb(r(1-b) - 1) \ .$$

Denne ligningen har formen $y_{n+1} = y_n^2 + c$ når vi velger

$$a = -\frac{1}{r} \ , \qquad b = \frac{1}{2} \ .$$

Det gir at

$$c = -rb(r(1-b)-1) = -\frac{r(r-2)}{4} = \frac{1-(r-1)^2}{4} \ .$$

I den logistiske avbildningen antar vi vanligvis at $0 \le r \le 4$, slik at intervallet $0 \le x \le 1$ er invariant. Intervallet $0 \le r \le 4$ tilsvarer intervallet

$$-2 \le c \le \frac{1}{4} \ .$$

Den nedre grensen $c = -2$ tilsvarer den øvre grensen $r = 4$. Men den øvre grensen $c = 1/4$ tilsvarer $r = 1$ og ikke den nedre grensen $r = 0$.

Sammenhengen mellom parametrene r og c er to til en: det svarer to verdier av r til en verdi av c, og ingen verdi av r kan gi $c > 1/4$. Den påstanden at avbildningene $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ og $y_{n+1} = y_n^2 + c$ er konjugerte, må altså tas med en liten klype salt: den gjelder bare for $c \le 1/4$.

Strogatz, oppgave 10.3.7

Gitt desimalforskyvningsavbildningen (et ord med 31 bokstaver!)

$$x_{n+1} = 10x_n \pmod 1 \ .$$

Hvis vi ser på den som en avbildning av enhetsintervallet $[0,1\rangle$ på seg selv, er den diskontinuerlig for $x_n = 0,1$, $x_n = 0,2$ og opp til $x_n = 0,9$.

Hvis vi derimot ser på den som en avbildning av en sirkel på seg selv, ved at vi identifiserer punktene $x = 0$ og $x = 1$, så er den en kontinuerlig avbildning som ganske enkelt strekker sirkelen 10 ganger rundt seg selv.

Rundt sirkelen er det 9 fikspunkt, de er

$$\frac{k}{9} = 0,kkkkkkk\ldots = 0,\overline{k} \qquad \text{for} \qquad k = 0,1,2,\ldots,8 \ .$$

Hvis $x_n = k/9$ med $k = 0,1,2,\ldots,8$, og hvis vi regner modulo 1, er nemlig

$$x_{n+1} = 10x_n = \frac{10k}{9} = \frac{(9+1)k}{9} = k + \frac{k}{9} = \frac{k}{9} = x_n \ .$$

Eller vi kan bruke desimalnotasjonen. Hvis $x_n = 0,abcdef\ldots$, så er

$$x_{n+1} = 0,bcdef\ldots \ .$$

Avbildningen gjør ikke noe annet enn å stryke første desimal bak kommaet.

Ethvert rasjonalt tall p/q der p og q er innbyrdes primiske heltall og $q \neq 2^a 5^b$ for $a,b = 0,1,2,\ldots$, har en periodisk desimalutvikling, det er derfor et periodisk punkt for denne avbildningen.

Ethvert irrasjonalt tall har en ikke-periodisk desimalutvikling, og er derfor et ikke-periodisk punkt. Iterasjon fra et slikt startpunkt vil heller ikke konvergere mot en periodisk bane.

For hver iterasjon 10-dobles avstanden mellom nærliggende punkter. Dermed har denne avbildningen en følsom avhengighet av startpunktet, og spesielt gjelder at alle periodiske baner er ustabile.

Strogatz, oppgave 10.4.4

En syklus for en avbildning er superstabil hvis og bare hvis den inkluderer et *kritisk punkt*, dvs. et punkt der avbildningen har derivert null. Dvs. at en superstabil syklus for den logistiske avbildningen $x \mapsto f(x) = rx(1-x)$ må inkludere det kritiske punktet $x = 1/2$ der $f'(x) = 0$. En superstabil tre-syklus for den logistiske avbildningen er altså gitt ved at $f(f(f(1/2))) = 1/2$. Vi har da at

$$\frac{1}{2} \mapsto \frac{r}{4} \mapsto \frac{r^2(4-r)}{16} \mapsto \frac{r^3(4-r)(16-r^2(4-r))}{256} = \frac{1}{2} \; .$$

Dette er en 7.-gradsligning for r,

$$r^3(4-r)(16-4r^2+r^3)) = 128 \; ,$$

eller omformet,

$$r^3(r^4-8r^3+16r^2+16r-64)+128 = 0 \; .$$

Denne ligningen kan vi løse numerisk, f.eks. ved å gjette på en tilnærmet løsning og så bruke Newtons metode. Men vi kan faktisk også løse den analytisk.

En løsning av ligningen finner vi ved å løse den enklere ligningen $f(1/2) = 1/2$, som gir $r/4 = 1/2$, altså $r = 2$. Men denne løsningen er uinteressant her, fordi den representerer et superstabilt fikspunkt og ikke en superstabil tre-syklus. Den ekte tre-syklusen må være gitt av ligningen

$$\frac{r^7-8r^6+16r^5+16r^4-64r^3+128}{r-2} = r^6-6r^5+4r^4+24r^3-16r^2-32r-64 = 0 \; .$$

Røttene i det siste polynomet er de røttene av det første polynomet som ikke er lik 2. Det siste polynomet viser seg å være symmetrisk om $r = 1$, det vil vi f.eks. oppdage dersom vi plotter det (vha. Maple, Matlab eller et lignende program). Hvis vi setter inn $r = 1+s$, har vi at

$$r^2 = s^2+2s+1 \; , \quad r^3 = s^3+3s^2+3s+1 \; , \quad r^4 = s^4+4s^3+6s^2+4s+1 \; ,$$
$$r^5 = s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+1 \; , \quad r^6 = s^6+6s^5+15s^4+20s^3+15s^2+6s+1 \; ,$$

og det gir ligningen

$$r^6-6r^5+4r^4+24r^3-16r^2-32r-64 = s^6-11s^4+35s^2-89 = 0 \; .$$

Dette er en tredjegradsligning i s^2, som kan løses eksakt. Den eneste reelle løsningen med $r > 1$ (funnet vha. Maple!) er

$$r = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}\left(11 + 2\sqrt[3]{100+12\sqrt{69}} + 2\sqrt[3]{100-12\sqrt{69}}\right)} = 3,831874\ldots \; .$$

Strogatz, oppgave 10.5.6

Eksempel på et Maple-program:

```
> liapunov :=
> proc(r)
>  local i,e,p,x;
>  p := evalf(Pi);
>  x := 0.4;
>  for i from 1 to 100 do
>   x := r*sin(p*x);
>  od;
>  e := 0.0;
>  for i from 1 to 200 do
>   x := r*sin(p*x);
>   e := e+ln(abs(r*p*cos(p*x))+10.0^(-40));
>  od;
>  e := e/200;
> end:
> xy := array(0..500);
> for j from 0 to 500 do
>  s := 0.1+0.004*j;
>  xy[j] := [s,liapunov(s)];
> od:
> yx := [seq(xy[j],j=0..500)]:
> plot(yx,0..2.2,-3..1.7);
```