Løsninger, innleveringsøving for TFY4325, våren 2005

Dette er ikke en mønsterløsning, det forventes ikke like utførlige redegjørelser til eksamen. Dette er ment som et eksempel på hvordan en kan *tenke*, mer enn hvordan en bør *skrive*. Men skriv helst tilstrekkelig utførlig til at det går fram hvordan du har tenkt. Et galt resonnement som er godt forklart, vil bli mildere bedømt til eksamen enn en slurvefeil uten forklaring til!

1a) Bruk Keplers 3. lov:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \,,$$

der P er omløpsperioden, a er avstanden mellom stjernene (mer presist: a er middelverdien av største og minste avstand, som er det samme som største halvakse i den elliptiske banen som den ene stjernen følger rundt den andre), og m_1 og m_2 er de to massene.
Sammenligner vi med Jordas bane rundt Sola, der perioden er 1 år, mens avstanden er 1 AU = 1 astronomisk enhet = 150 millioner kilometer, og summen av massene er solmassen $M_\odot = 2,0\,10^{30}$ kg (fordi jordmassen er neglisjerbar), så får vi at

$$\left(\frac{P}{1\text{ år}}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{a}{1\text{ AU}}\right)^3$$

dvs. at

$$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \left(\frac{1\text{ år}}{P}\right)^2 \left(\frac{a}{1\text{ AU}}\right)^3 = \frac{24^3}{79{,}9^2} = 2{,}17 \,.$$

Summen av massene er 2,17 solmasser. Følgelig må i hvert fall den ene av de to stjernene ha litt større masse enn Sola. Når den har litt større masse, har den også litt større luminositet, se oppgave 2.
Denne måten å regne på er absolutt den enkleste, og gir svaret i en fornuftig enhet, nemlig i antall solmasser. Men det er selvfølgelig fullt mulig å regne ut svaret direkte i kilogram:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2\ (24\ 150\ 10^9\text{ m})^3}{6{,}67\ 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}\ (79{,}9\ 365{,}25\ 24\ 3600\text{ s})^2} = 4{,}34\ 10^{30}\text{ kg} \,.$$

1b) Vi må først beregne omløpsperioden, som er omkretsen av en sirkel dividert med hastigheten:

$$P = \frac{2\pi\ 26\,000\text{ lysår}}{220\text{ km/s}} = \frac{2\pi\ 26\,000\ 300\,000\text{ km/s år}}{220\text{ km/s}} = 2{,}23\ 10^8\text{ år}$$

For å bruke formelen ovenfor til å beregne massen, må vi dessuten uttrykke avstanden til sentrum av Melkeveien i astronomiske enheter:

$$\begin{aligned} a &= 26\,000\text{ lysår} = 26\,000\ 300\,000\text{ (km/s) år} = 26\,000\ 300\,000\text{ km/s } 365{,}25\ 24\ 3600\text{ s} \\ &= 2{,}46\ 10^{17}\text{ km} = 2{,}46\ 10^{17}\text{ km}\ \frac{1\text{ AU}}{150\ 10^6\text{ km}} = 1{,}64\ 10^9\text{ AU} \,. \end{aligned}$$

Massen M i Melkeveien innenfor Solas bane skulle da være gitt av ligningen

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{1\text{ år}}{P}\right)^2 \left(\frac{a}{1\text{ AU}}\right)^3 = \frac{(1{,}64\ 10^9)^3}{(2{,}23\ 10^8)^2} = 8{,}9\ 10^{10}.$$

Etter dette regnestykket skulle det finnes ca. 100 milliarder stjerner i Melkeveien nærmere sentrum enn vi befinner oss. Siden tettheten av stjerner er størst inn mot sentrum, vil dette trolig være en nokså stor andel av det totale antallet.
Denne metoden til å måle massen av Melkeveien ville ha vært helt korrekt dersom massefordelingen i Melkeveien var fullstendig kulesymmetrisk. Da ville gravitasjonen fra Melkeveien virke på solsystemet som om massen M innenfor en radius på 26 000 lysår var samlet i sentrum, og dessuten ville gravitasjonskreftene fra massen som befinner seg mer enn 26 000 lysår fra sentrum, summeres opp til null. Ingen av disse to konklusjonene holder eksakt, fordi massefordelingen ikke er kulesymmetrisk, men skiveformet. Spesielt impliserer skiveformen at den massen som er utenfor solsystemet, trekker utover, bort fra sentrum. Til gjengjeld vil massen som er innenfor, trekke mer innover enn om fordelingen var kulesymmetrisk.
Et spesialtilfelle av en kulesymmetrisk massefordeling i Melkeveien er dersom massen er sterkt konsentrert inn mot sentrum. At dette er en dårlig tilnærming, ser vi av rotasjonskurven til Melkeveien. Rotasjonshastighetene til stjernene varierer nemlig lite med avstanden til sentrum. Hvis all massen lå nær sentrum, skulle rotasjonshastigheten lenger ute avta med avstanden til sentrum, omvendt proporsjonalt med kvadratroten av avstanden.

2) Avstanden er

$$d = 4{,}39 \text{ lysår} = 4{,}39 \text{ lysår} \frac{1 \text{ parsec}}{3{,}26 \text{ lysår}} = 1{,}347 \text{ parsec} .$$

Parallaksen er

$$\alpha = 1 \text{ buesekund} \frac{1 \text{ parsec}}{d} = 1 \text{ buesekund} \frac{1}{1{,}347} = 0{,}743 \text{ buesekund} = 0{,}743'' .$$

Vi kan også bruke direkte definisjonen, at parallaksen er en astronomisk enhet dividert med avstanden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 \text{ AU}}{d} = \frac{1 \text{ AU}}{4{,}39 \text{ lysår}} = \frac{150\ 10^6 \text{ km}}{4{,}39\ 300\,000 \text{ km/s}\ 365{,}25\ 24\ 3600 \text{ s}} \\ &= \frac{150\ 10^6 \text{ km}}{4{,}39\ 9{,}47\ 10^{12} \text{ km}} = 3{,}61\ 10^{-6} . \end{aligned}$$

Dette er parallaksen i radianer. Nå er π radianer lik 180 grader, slik at

$$3{,}61\ 10^{-6} = 3{,}61\ 10^{-6} \frac{180\ 3600''}{\pi} = 3{,}61\ 10^{-6}\ 206\,265'' = 0{,}744'' .$$

Den absolutte størrelsesklassen er størrelsesklassen omregnet til en standard avstand av 10 lysår. Når størrelsesklassen er m for en stjerne i avstanden d, er den absolutte størrelsesklassen gitt som

$$M = m - 5 \log_{10}\left(\frac{d}{10 \text{ parsec}}\right) .$$

Hvordan kommer vi fram til denne formelen? For det første: størrelsesklassen m varierer lineært med logaritmen av den tilsynelatende lysstyrken (det som kalles "apparent brightness" i læreboken). For det andre: en faktor på 10 i avstanden utgjør en faktor på 100 (eller rettere 1/100) i lysstyrken, som pr. definisjon tilsvarer en forskjell på 5 størrelsesklasser; det bestemmer faktoren 5 i formelen når vi bruker logaritmen med basis 10. For det tredje: hvis

avstanden d f.eks. er større enn 10 parsec, så ser stjernen lyssvakere ut enn om den var i standardavstanden 10 parsec, og da er den observerte størrelsesklassen m større enn den absolutte størrelsesklassen M, det bestemmer fortegnet $-$ i formelen.
Når $d = 1{,}347$ parsec, så er

$$5 \log_{10}\left(\frac{d}{10 \text{ parsec}}\right) = 5 \log_{10} 0{,}1347 = -4{,}35 \ .$$

De absolutte størrelsesklassene for de to stjernene er derfor $-0{,}01{+}4{,}35 = 4{,}34$ og $1{,}33{+}4{,}35 = 5{,}68$. Den første har større luminositet enn Sola (som har absolutt størrelsesklasse 4,8), og faktoren er

$$100^{(4{,}8-4{,}34)/5} = 100^{0{,}092} = 10^{0{,}184} = 1{,}53 \ .$$

Den andre har mindre luminositet enn Sola, og faktoren er

$$100^{(4{,}8-5{,}68)/5} = 100^{-0{,}176} = 10^{-0{,}352} = 0{,}44 \ .$$

Så var det formelen for vinkeloppløsningen θ til et teleskop med lysåpning (som regel speildiameter) D, se læreboken s. 129 (6. utgave s. 132) (der benevningen buesekunder er underforstått),

$$\theta = 250\,000'' \ \frac{\lambda}{D} = 250\,000'' \ \frac{1 \text{ radian}}{206\,265''} \ \frac{\lambda}{D} = 1{,}2 \ \frac{\lambda}{D} \ .$$

Her er $\lambda = 5 \ 10^{-7}$ m bølgelengden av lyset. Som vi her ser, blir formelen enklere, i den forstand at proporsjonalitetskonstanten som inngår er praktisk talt lik 1, når en regner vinkelen i radianer i stedet for i buesekunder.
Synsvinkelen β mellom de to stjernene er (omtrent) lik avstanden mellom dem, 24 AU, dividert med avstanden $d = 1 \text{ AU}/\alpha$, der α er parallaksen. Altså,

$$\beta = \frac{24 \text{ AU}}{d} = \frac{24 \text{ AU } \alpha}{1 \text{ AU}} = 24\,\alpha = 24 \ 3{,}61 \ 10^{-6} = 8{,}7 \ 10^{-5} = 8{,}7 \ 10^{-5} \ 206\,265'' = 17{,}9'' \ .$$

For å kunne se de to stjernene hver for seg, må en ha et teleskop med vinkeloppløsning θ mindre enn vinkelen β, altså med lysåpning

$$D > \frac{1{,}2 \ \lambda}{\beta} = \frac{1{,}2 \ \lambda}{8{,}7 \ 10^{-5}} = 13\,900\,\lambda = 13\,900 \ 5 \ 10^{-7} \text{ m} = 7{,}0 \text{ mm} \ .$$

Siden pupillen i øyet måler kanskje 5 mm i mørket, betyr det at de to stjernene nesten kan skjelnes uten teleskop, med bare øyet.

3) Lyset fra HII emisjonståker (Orion-tåken) består av enkelte spektrallinjer, og det er gjerne rødt, fordi det synlige lyset domineres av spektrallinjen H_α, som kommer fra overgangen fra 2. eksiterte tilstand ($n = 3$) til 1. eksiterte tilstand ($n = 2$) i hydrogenatomet.
Lyset fra refleksjonståker (som omgir Pleiadene) er reflektert stjernelys, og har derfor et kontinuerlig spektrum med absorpsjonslinjer. Det er gjerne blått, fordi korte bølgelengder (blått lys) reflekteres mer effektivt enn lange bølgelengder (rødt lys). Det skyldes at atomene og støvpartiklene som sprer lyset, er mindre enn bølgelengden av lyset. Spredning av bølger mot en hindring (f.eks. vannbølger mot en stake som står opp av vannet) er mest effektiv når bølgelengden er sammenlignbar med, eller mindre enn, den hindringen som bølgene spres mot.

En annen grunn til at refleksjonståker ser blå ut, kan være at de stjernene som lyser dem opp, ofte er blå kjempestjerner.

4) For å bruke virialteoremet skal vi strengt tatt kjenne tidsmidlet av kinetisk og potensiell energi. Vi har ikke tid til å sitte og observere galaksene over hundrevis av millioner år for å finne tidsmidlene. Men det er kanskje ikke helt urimelig å tenke at når vi observerer en galaksehop nettopp nå, så er det å betrakte som et tilfeldig valgt tidspunkt, og den verdien som vi observerer nettopp nå, på det tilfeldig valgte tidspunktet, vil sannsynligvis ligge i nærheten av tidsmidlet. Vi postulerer derfor at $2E_K = -V$, der E_K og V er den kinetiske og potensielle energi som vi observerer nå.
Vi observerer bare den ene hastighetskomponenten, nemlig komponenten langs synsretningen, men igjen antar vi at denne retningen er representativ, slik at vi ville måle (omtrent) samme ${\sigma_r}^2$ dersom vi kunne måle de to andre ortogonale hastighetskomponentene. Derfor postulerer vi at $E_K = (3/2)m{\sigma_r}^2$, med en faktor 3 fordi hastigheten $\boldsymbol{v}_i$ av en galakse har 3 komponenter. Det gir at

$$3M{\sigma_r}^2 = \frac{GM^2}{R} \,,$$

dvs. at

$$M = \frac{3R{\sigma_r}^2}{G} = \frac{3\ 5\ 10^6 \text{ lysår } (750 \text{ km/s})^2}{6{,}67\ 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} \,.$$

Siden et lysår er

$$300\,000 \text{ km/s } 365{,}25\ 24\ 3600 \text{ s} = 9{,}47\ 10^{15} \text{ m} \,,$$

finner vi at

$$M = 1{,}2\ 10^{45} \text{ kg} \,.$$

Siden solmassen er $M_\odot = 2\ 10^{30}$ kg, blir massen av galaksehopen $6\ 10^{14}$ solmasser. Sier vi (se oppgave 1b) at en typisk galakse inneholder 10^{11} solmasser, burde altså en slik galaksehop inneholde 6000 galakser, innenfor en radius på 5 millioner lysår, dvs. et volum på

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = 5\ 10^{20} \text{ (lysår)}^3 \,.$$

Volumet pr. galakse blir $1/6000$ av dette, dvs. at avstanden mellom hver galakse skulle bli omtrent $5\ 10^6$ lysår$/\sqrt[3]{6000} = 280\,000$ lysår, som ville si at galaksene nesten måtte berøre hverandre. Altså er 6000 galakser et urimelig stort antall. Dette illustrerer ett av eksemplene på såkalt "mørk materie", nemlig at galaksehoper ser ut til å inneholde flere ganger så mye masse som det som finnes tilsammen i galaksene der.

5) Vekten av den loddrette luftsøylen over 1 m^2 av jordoverflaten er 10^5 N. Vekten er mg, der m er massen og $g = 9{,}8$ m/s$^2 \approx 10$ m/s^2 er tyngdens akselerasjon. Massen av denne luftsøylen er altså 10^4 kg. Jordradien er $R = 6378$ km, og det totale arealet av jordoverflaten er

$$4\pi R^2 = 5{,}112\ 10^8 \text{ km}^2 = 5{,}112\ 10^{14} \text{ m}^2 \,.$$

Massen av jordatmosfæren blir da $5{,}11\ 10^{18}$ kg.
Sammenlignet med hele jordmassen på $5{,}974\ 10^{24}$ kg blir det en andel på $8{,}56\ 10^{-7}$.

6) For en ideal gass ved konstant temperatur T er trykket P proporsjonalt med tettheten ρ,

$$P = \frac{\rho k_B T}{\overline{m}} \,.$$

Ligningen for hydrostatisk likevekt gir da at

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{\overline{m}Pg}{k_B T} = -\alpha P \ ,$$

der α er konstant når temperaturen er konstant,

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T} \ .$$

Dette er en separabel differensialligning, vi kan skrive den som

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\alpha \, \mathrm{d}z \ ,$$

da kan den integreres direkte, og løsningen er

$$\ln P - \ln P_0 = -\alpha(z - z_0) \ ,$$

der P_0 og z_0 er integrasjonskonstanter. For en førsteordens ligning som denne skal vi som kjent ha en integrasjonskonstant, ikke to, og det er nettopp det vi har, men den ene konstanten velger vi å skrive som $\ln P_0 + \alpha z_0$. Eksponensiering gir at

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha(z - z_0)} \ .$$

Luft består av rundt regnet 80 % nitrogen (N_2, massetall 2 14 = 28) og 20 % oksygen (O_2, massetall 2 16 = 32). Gjennomsnittlig masse for et luftmolekyl er følgelig (omtrentlig regnet, der u = 1,66 10^{-27} kg er atommasseenheten, praktisk talt identisk med protonmassen m_p)

$$\overline{m} = (0{,}8\ 28 + 0{,}2\ 32)\ \mathrm{u} = 28{,}8\ \mathrm{u} = 28{,}8\ 1{,}66\ 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 4{,}8\ 10^{-26}\ \mathrm{kg} \ .$$

Den numeriske verdien for konstanten α, hvis vi setter temperaturen (litt tilfeldig) lik 283 K, altså 10 grader Celsius, blir

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T} = \frac{4{,}8\ 10^{-26}\ \mathrm{kg}\ 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}38\ 10^{-23}\ \mathrm{J/K}\ 283\ \mathrm{K}} = 1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m} \ .$$

Hvis vi velger z_0 som havnivået, så er altså $P_0 = 1$ atmosfære. For Galdhøpiggen har vi at $z - z_0 = 2469$ m, og trykket der er

$$P = P_0 \ \mathrm{e}^{-(1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m})\ 2469\ \mathrm{m}} = P_0 \ \mathrm{e}^{-0{,}2963} = 0{,}744\ P_0 \ .$$

Tilsvarende for de to andre fjelltoppene,

$$P = P_0 \ \mathrm{e}^{-(1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m})\ 4807\ \mathrm{m}} = P_0 \ \mathrm{e}^{-0{,}5768} = 0{,}562\ P_0 \ ,$$

og

$$P = P_0 \ \mathrm{e}^{-(1{,}20\ 10^{-4}/\mathrm{m})\ 8848\ \mathrm{m}} = P_0 \ \mathrm{e}^{-1{,}0618} = 0{,}346\ P_0 \ .$$

7) For atmosfæren til Mars bruker vi den samme formelen som for jordatmosfæren,

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha(z - z_0)} \ .$$

Men konstanten

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T}$$

har nå en litt annen numerisk verdi. Atmosfæren til Mars inneholder 95 % CO_2, så vi regner som om den besto av bare CO_2. Molekylvekten av CO_2 er $12 + 2\ 16 = 44$, slik at gjennomsnittsmassen av et molekyl er

$$\overline{m} = 44 \text{ u} = 44\ 1{,}66\ 10^{-27} \text{ kg} = 7{,}3\ 10^{-26} \text{ kg} .$$

Tyngdens akselerasjon er $g = 3{,}8 \text{ m/s}^2$ (sammenlignet med Jorda er massen 0,107 og radien 0,533, slik at tyngdens akselerasjon på Mars sammenlignet med på Jorda blir $0{,}107/0{,}533^2 = 0{,}38$). Temperaturen varierer mye mellom dag og natt, bruker vi middeltemperaturen $T = 220$ K, får vi at

$$\alpha = \frac{\overline{m}\, g}{k_B T} = \frac{7{,}3\ 10^{-26} \text{ kg } 3{,}8 \text{ m/s}^2}{1{,}38\ 10^{-23} \text{ J/K } 220 \text{ K}} = 9{,}1\ 10^{-5}/\text{m} .$$

Med en høydeforskjell på $z - z_0 = 31$ km finner vi da at

$$P = P_0\ \mathrm{e}^{-(9{,}1\ 10^{-5}/\text{m})\ 31\,000 \text{ m}} = P_0\ \mathrm{e}^{-2{,}82} = 0{,}060\ P_0 .$$

Trykket på toppen av Olympus Mons er 6 % av trykket i det laveste punktet på Mars.

8) Selv om det blåser kraftig, vil trykket utlignes praktisk talt fullstendig, slik at betingelsen for hydrostatisk likevekt vil gjelde,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g .$$

Luft som beveger seg fra Dovre ned mot Trondheim vil trykkes sammen, fordi lufttrykket øker nedover. Hvis sammentrykkingen skjer adiabatisk, er altså $P = K\rho^\gamma$, der K er en konstant. Det vil si at

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} .$$

Disse to ligningene tilsammen gir at

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = -\frac{\rho g}{\gamma K \rho^{\gamma-1}} = -\frac{g}{\gamma K \rho^{\gamma-2}} .$$

Som vi omskriver til

$$\gamma K \rho^{\gamma-2}\, \mathrm{d}\rho = -g\, \mathrm{d}z .$$

Integrasjon gir så at

$$\frac{\gamma K \rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1} = -g\,(z - z_0) ,$$

der z_0 er en integrasjonskonstant. Vi setter inn først $K\rho^\gamma = P$, det gir at

$$\frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} = -g\,(z - z_0) .$$

Deretter setter vi inn $P/\rho = k_B T/\overline{m}$, det gir at

$$\frac{\gamma k_B T}{(\gamma - 1)\overline{m}} = -g\,(z - z_0) ,$$

eller ekvivalent,

$$T = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\overline{m} g \, (z - z_0)}{k_B} = -\frac{2}{5} \frac{4{,}8 \ 10^{-26} \ \text{kg} \ 9{,}8 \ \text{m/s}^2 \ (z - z_0)}{1{,}38 \ 10^{-23} \ \text{J/K}} = -(1{,}36 \ 10^{-2} \ \text{K/m}) \, (z - z_0) \ .$$

Hvis temperaturen ved $z = z_1 = 1100$ m er T_1, og temperaturen ved $z = z_2 = 100$ m er T_2, så er temperaturdifferensen

$$T_2 - T_1 = -(1{,}36 \ 10^{-2} \ \text{K/m}) \, (z_2 - z_1) = -(1{,}36 \ 10^{-2} \ \text{K/m}) \, (-1000 \ \text{m}) = 13{,}6 \ \text{K} \ .$$

Hvis alle opp- og nedgående luftstrømmer i atmosfæren var adiabatiske, så skulle, i følge vårt lille regnestykke, temperaturen avta med en grad for hver 70 meter over havet. Men mange ganger ligger jo lufta stille, slik at temperaturene utjevnes. Derfor er det forståelig at den virkelige temperaturgradienten blir mindre.
Vårt regnestykke forteller forresten også at den kritiske temperaturgradienten for konveksjon i atmosfæren er ca. en grad for hver 70 meter. Følgelig vil det ikke foregå konveksjon når temperaturgradienten er en grad for hver 120 meter over havet. Men det trengs ikke særlig mye oppvarming ved bakken en sommerdag med sol, før temperaturgradienten blir større (i absoluttverdi) enn en grad pr. 70 meter, og da kan varm luft stige fra bakken og flere kilometer opp, slik at det oppstår cumulus-skyer.