Eksamen i Astrofysikk, fag TFY4325 og FY2450
Torsdag 2. juni 2005
Løsninger

1a) Hva er det som begrenser vinkeloppløsningen i et teleskop? Forklar kort hvorfor.

Vinkeloppløsningen begrenses av diameteren til objektivet (som kan være enten en linse, et speil, eller en parabolantenne i et radioteleskop). Hvis to eller flere teleskop (optiske teleskop eller radioteleskop) koples sammen, er det avstanden mellom dem som er avgjørende for oppløsningen. Årsaken til begrensningen er diffraksjon, dvs. at lys og radiobølger er bølger. For at vi skal kunne skille to stjerner som vi ser på, i lys med en gitt bølgelengde λ, må vinkelen θ mellom dem være minst så stor at gangforskjellen mellom de to bølgefrontene blir en bølgelengde over diameteren D (hvis to teleskop samkjøres, betegner vi avstanden mellom dem med D). I følge dette enkle resonnementet må

$$\theta \geq \frac{\lambda}{D} \ .$$

Vanlig praksis er å regne med en ekstra faktor 1,22 og kreve at

$$\theta \geq 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} = 1{,}22\,\frac{180 \times 3600''}{\pi \text{ radianer}}\,\frac{\lambda}{D} = 250\,000''\,\frac{\lambda}{D} \ .$$

En annen gunstig virkning av å gjøre lysåpningen stor, er at en får mye lys inn i teleskopet og kan se lyssvake objekt. Men det har ingenting å gjøre med vinkeloppløsning.
Mange påpeker ganske riktig at vinkeloppløsningen ofte også begrenses av lysbrytningen i lufta, fordi det er urolig luft både inne i teleskopet og høyere oppe i atmosfæren.

1b) Hva er en hovedseriestjerne (engelsk: main sequence star)?
De fleste stjernene vi ser på himmelen er hovedseriestjerner. Hvorfor?
Er Sola en hovedseriestjerne?

En hovedseriestjerne befinner seg på hovedserien i Hertzsprung–Russell-diagrammet, og den skinner fordi den fusjonerer (gjør om) hydrogen til helium i sitt sentrum.
Når vi ser en stjerne, ser vi den på et mer eller mindre tilfeldig utviklingstadium. Siden alle stjerner befinner seg på hovedserien det meste av den tiden de skinner, har vi størst sjanse for å se dem mens de er på hovedserien.
Sola er en hovedseriestjerne. Senere vil den utvikle seg til en kjempestjerne og deretter en hvit dverg, og vil se helt annerledes ut enn den gjør nå.

1c) Skisser kort ≪avstands-stigen≫, dvs. de ulike metodene for å måle avstander, som kan kalibreres mot hverandre og som gjør det mulig å måle avstander i universet, både til de nærmeste stjernene og til de fjerneste galaksene.

Avstands-stigen består av en serie metoder til avstandsmåling. Hvert trinn i stigen er en metode som må kalibreres mot de lavere trinnene.
– Parallaksemåling er (omtrent) den eneste direkte geometriske metoden. Prinsippet

er at en måler synsvinkelen til en stjerne to ganger med et halvt års mellomrom, i forhold til stjerner som ligger så langt borte at synsvinkelen til dem ikke forandres merkbart. Forskjellen i synsvinkel mellom de to målingene gir avstanden målt med den astronomiske enheten. Ved hjelp av Hipparkos-satellitten er metoden brukt ut til avstander på 1500 lysår.
– Spektroskopisk parallakse er en metode med et misvisende navn. Ved hjelp av spektret til en stjerne bestemmes stjernetypen, mer presist spektralklassen og luminositetsklassen, og dermed luminositeten L. Ut fra den målte tilsynelatende lysstyrken b kan en så beregne avstanden d, ved hjelp av formelen

$$b = \frac{L}{4\pi d^2} \ .$$

Metoden kan brukes ut til ca. 30 000 lysår.
Den grunnleggende idéen er altså at en har en «standard lyskilde», med kjent luminositet L, og finner avstanden ved å måle den tilsynelatende lysstyrken b.
– Variable stjerner av typen RR Lyrae kan brukes som standard lyskilder, fordi det finnes en sammenheng mellom periode og luminositet for dem. De kan brukes ut til 300 000 lysår. Kefeider er mye mer lyssterke variable stjerner, og ved hjelp av den tilsvarende sammenhengen mellom periode og luminositet for dem kan de brukes til å måle avstander ut til 100 millioner lysår, altså til mange av de nærmeste galaksene.
– Supernovaer av type Ia brukes som standard lyskilder for å måle avstander ut til flere milliarder lysår.
– En mer spesialisert metode er Tully-Fischer-relasjonen. Da er det en hel spiralgalakse som brukes som standard lyskilde. Idéen er at 21 cm spektrallinjen i radiostrålingen fra spiralgalaksen blir bredere, pga. Doppler-effekten, når strålingen kommer fra mange gass-skyer med ulik hastighet. Linjebredden henger sammen med rotasjonshastigheten til galaksen, og følgelig med massen og dermed også med luminositeten til galaksen som helhet. En lignende metode finnes også for elliptiske galakser.
– Hubbles lov, det vil si sammenhengen mellom rødforskyvningen av spektrallinjer og avstanden til fjerne galakser, kan også brukes til å måle avstander. Denne metoden, som de fleste andre, er en empirisk relasjon som må kalibreres før den kan brukes.

1d) De første astronomene som studerte supernovaer, klassifiserte dem som type I og type II, etter hvordan spektret så ut.

Hva er den viktigste forskjellen mellom spektrene til supernovaer av type I og type II?

Etter hvert ble det klart at det fantes viktige forskjeller mellom supernovaer av type I innbyrdes, og derfor ble de underklassifisert som type Ia, Ib og Ic.

En supernova av type Ia er, i følge teorien, en hvit dvergstjerne som eksploderer, så voldsomt at det ikke blir noe annet igjen enn en ekspanderende sky av gass.

Hva er en hvit dvergstjerne, og hva er det som utløser eksplosjonen?

Hva er energikilden i en slik eksplosjon av en hvit dverg?

Spektret til en type II supernova inneholder absorpsjonslinjer fra hydrogen, mens spektret til en type I supernova mangler hydrogenlinjene.
En hvit dvergstjerne er en utbrent stjerne som opprinnelig hadde mindre enn ca. 8 solmasser mens den befant seg på hovedserien. Overgangen fra hovedseriestjerne til hvit dverg går via et stadium der stjernen er en rød kjempe som først fusjonerer hydrogen

til helium i et skall omkring en heliumkjerne, og som deretter fusjonerer helium til karbon, og muligens karbon til tyngre grunnstoffer. Kjempestjernestadiet til en slik stjerne slutter ved at mye av massen kastes av som en planetarisk tåke, det slutter altså ikke med en supernovaeksplosjon.
Den hvite dvergen er svært kompakt, idet den har en masse som kan være opp til 1,4 solmasser (Chandrasekhar-massen), innenfor en radius som er sammenlignbar med jordradien. Gasstrykket som hindrer den i å kollapse videre, er nulltemperaturtrykket i en degenerert elektrongass.
En hvit dverg kan eksplodere som supernova dersom den tilhører et dobbeltstjernesystem der den andre stjernen er så nær, eller er en så stor kjempestjerne, at den overfører masse til den hvite dvergen. Når massen til den hvite dvergen øker opp til Chandrasekhar-massen, kollapser den. Hvis den består av karbon, utløser kollapsen kjernereaksjoner mellom atomkjernene av karbon. Kjernereaksjonene løper løpsk, fordi det ikke fins noen effektiv reguleringsmekanisme: degenerasjonstrykket er temperaturuavhengig, derfor kan temperaturen øke mye uten at trykket øker vesentlig og får gassen til å ekspandere. Dessuten øker reaksjonshastigheten proporsjonalt med en høy potens av temperaturen. Resultatet er en kjernefysisk eksplosjon som sprenger hele stjernen i stykker. Den hvite dvergen blir en eneste stor ≪karbonbombe≫.
Energien som frigjøres i eksplosjonen er altså kjerneenergi, fra fusjon av karbonkjerner. Når all massen kastes ut, frigjøres det ikke gravitasjonsenergi, tvert imot trengs det energi for å overvinne gravitasjonen.

1e) I en supernova av type Ib, Ic eller II er det kjernen i en utbrent massiv stjerne (med mer enn ca. 8 solmasser) som kollapser, og sluttresultatet er at det meste av massen til stjernen slynges ut i en eksplosjon.
Hva er den viktigste energikilden i en supernovaeksplosjon av denne typen?
Hvilken type supernovaeksplosjon, type Ia eller type II, er mest energirik?
Hvilken type lyser sterkest i synlig lys?
(Det er lov å gjette, hvis du ikke vet svarene!)

Energien i en slik eksplosjon er gravitasjonsenergi som frigjøres når kjernen i stjernen kollapser. Husk formelen for gravitasjonsenergien til en kulesymmetrisk massefordeling:

$$V = -a\,\frac{GM^2}{R}\,,$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er massen, R er radien og $a \approx 1$. Den forteller at når $R \to 0$, kan det frigjøres nær sagt ubegrenset mye energi. Før kollapsen er kjernen omtrent som en hvit dverg, med en masse M på ca. en solmasse og radius omtrent lik jordradien, $R_1 \approx 5000$ km. Etter kollapsen er den samme massen innenfor en radius $R_2 \approx 15$ km. Et grovt overslag sier at gravitasjonsenergien som frigjøres, er

$$\begin{aligned}
\Delta V &\approx GM^2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\\
&\approx 6{,}67\times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\ (2\times 10^{30}\ \mathrm{kg})^2\left(\frac{1}{15\ \mathrm{km}}-\frac{1}{5000\ \mathrm{km}}\right)\\
&= 1{,}8\times 10^{46}\ \mathrm{J}\,.
\end{aligned}$$

Dette er mye mer energi enn det frigjøres i en supernovaeksplosjon av type Ia. Men fordi en supernova av type II sender ut det meste av energien i form av nøytrinoer, er den mindre lyssterk i synlig lys enn en supernova av type Ia.

2a) Stjernen Mintaka, også kalt δ Orionis, er lengst til høyre av de tre stjernene i Orions belte. Den er faktisk et stjernesystem som består av fire enkeltstjerner, men to av de fire dominerer fullstendig, fordi de er blå kjempestjerner.
I denne oppgaven tar vi for oss de to kjempestjernene. De klassifiseres i nesten samme spektralklasse, nemlig O9 og B0, og det betyr at begge har en overflatetemperatur på omtrent 30 000 K. Hver av dem har en luminositet som er 70 000 ganger luminositeten til Sola. De går i bane rundt hverandre i en avstand av bare 0,2 AU (astronomiske enheter), med en periode på 5,73 døgn.
De to kjempestjernene må ha omtrent samme radius. Hvorfor?
Beregn radien, og sammenlign med den oppgitte avstanden mellom stjernene.

Luminositeten til Sola er $L_\odot = 3{,}86 \times 10^{26}$ W. Luminositeten til hver av de blå kjempestjernene er $L = 70\,000\ L_\odot = 2{,}70 \times 10^{31}$ W. Luminositeten er overflatearealet $4\pi R^2$, der R er radien, ganger fluksen $F = \sigma T^4$ (Stefan–Boltzmanns lov):

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \ .$$

Når de to stjernene har samme luminositet og overflatetemperatur, må de nødvendigvis ha samme radius. Radien er

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{2{,}70 \times 10^{31}\ \mathrm{W}}{4\pi\ 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}} \times 30\,000^4\ \mathrm{K}^4}} \\ &= 6{,}84 \times 10^9\ \mathrm{m} = 6{,}8 \times 10^9\ \mathrm{m}\ . \end{aligned}$$

De to stjernene tilsammen fyller opp $2R = 1{,}36 \times 10^{10}$ m av avstanden mellom dem, som er 0,2 AU $= 3 \times 10^{10}$ m. Da er det ikke mye plass igjen! Avstanden mellom sentrene er fire stjerneradier, altså like utenfor Roche-grensen på 2,5 radier, som er det nærmeste de kan komme hverandre uten å slites i stykker av tidevannskrefter.

2b) Beregn den absolutte størrelsesklassen til hver av de to stjernene (for eksempel ved å sammenligne med Sola).
Den observerte absolutte størrelsesklassen i synlig lys er $-4{,}3$ for hver av dem. Stemmer det med din beregning?

Sola har absolutt størrelsesklasse $M_\odot = 4{,}8$. En stjerne med luminositet $L = 70\,000\ L_\odot$ har da absolutt størrelsesklasse

$$M = M_\odot + 2{,}5\ \log_{10}\left(\frac{L_\odot}{L}\right) = 4{,}8 + 2{,}5\ \log_{10}\left(\frac{1}{70\,000}\right) = -7{,}3\ .$$

At den absolutte størrelsesklassen i synlig lys er «bare» $-4{,}3$, tre størrelsesklasser mindre, skyldes at disse stjernene har så høy overflatetemperatur at mesteparten av strålingen faller utenfor det synlige spektret, i ultrafiolett. Tre størrelsesklasser tilsvarer en faktor på

$$100^{\frac{3}{5}} = 10^{1{,}2} = 15{,}8 = \frac{1}{0{,}063}$$

i luminositet. Det er altså 6% av strålingen som kommer i form av synlig lys.

2c) De to kjempestjernene i Mintaka utgjør et spektroskopisk dobbeltstjernesystem som samtidig er en formørkelsesvariabel.
Forklar hvordan Doppler-effekten gjør det mulig å observere at spektret består av lys fra to stjerner, og dessuten å måle avstanden mellom de to stjernene.

På grunn av Doppler-effekten oscillerer spektrallinjene fra hver av stjernene litt fram og tilbake. Samtidig som den ene stjernen beveger seg mot oss, slik at linjene fra den blåforskyves, beveger den andre seg bort fra oss, slik at linjene fra den rødforskyves. Og omvendt. Da vil alle spektrallinjene se doble ut. Midt mellom disse to stadiene finnes det to stadier der begge stjernene beveger seg vinkelrett på synslinjen til oss, slik at ingen spektrallinjer Doppler-forskyves (bortsett fra at systemet som helhet beveger seg). Da vil alle spektrallinjene være enkeltlinjer. Spektret består altså av to sett absorpsjonslinjer som oscillerer i motfase.
Ved å måle Doppler-forskyvingen $\Delta\lambda$ av en spektrallinje med bølgelengde λ kan en finne hastigheten v som stjernen beveger seg med, i følge formelen

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \, ,$$

der c er lyshastigheten. Siden omploøpsperioden P er kjent (det er den samme perioden som spektrallinjene oscillerer med), kan en dermed også finne avstanden r mellom stjernene, i følge formelen

$$vP = 2\pi \, \frac{r}{2} \, ,$$

som gjelder dersom vi kan anta at stjernene har samme masse og går i sirkelbaner om et felles massesentrum. Det faktum at de to stjernene (så vidt det er) formørker hverandre, forteller at vi ser dem (nesten) i baneplanet, slik at den hastigheten vi måler ved hjelp av Doppler-effekten, er den fulle banehastigheten.
Mange foreslår å bruke Keplers tredje lov til å beregne avstanden mellom stjernene. Men da måtte vi kjenne den totale massen. Det er nødvendig å gå motsatt vei: bruke Keplers tredje lov til å beregne massen ut fra avstanden.
I 1904 studerte den tyske astronomen Johannes Hartmann nettopp dette dobbeltstjernesystemet, og gjorde en stor oppdagelse. Han fant et tredje sett med spektrallinjer som ikke oscillerer, og tolket dem slik at de kommer fra et interstellart medium, altså gass i rommet mellom oss og Mintaka.

2d) Beregn massen til hver av stjernene, under forutsetning at de har samme masse.
Vurder om svaret virker fornuftig.

Keplers tredje lov gir summen av massene,

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 \, (3{,}0 \times 10^{10} \text{ m})^3}{6{,}673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times (5{,}73 \times 24 \times 3600 \text{ s})^2} \\ &= 6{,}52 \times 10^{31} \text{ kg} = 6{,}5 \times 10^{31} \text{ kg} \, . \end{aligned}$$

I dette tilfellet har hver av stjernene like stor masse. Massen til en stjerne er derfor $3{,}25 \times 10^{31}$ kg eller omtrent 16 solmasser. Vi kan også regne ut massen direkte målt med solmassen $M_\odot$ (her betyr M masse og ikke absolutt størrelsesklasse):

$$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \left(\frac{a}{1\ \text{AU}}\right)^3 \left(\frac{1\ \text{år}}{P}\right)^2 = (0{,}2)^3 \left(\frac{365{,}25}{5{,}73}\right)^2 = 32{,}5\ .$$

En stjerne med 16 solmasser er en virkelig kjempestjerne. Stjerner av spektralklassene O og B har typisk masser rundt 20 solmasser, og så langt virker tallet fornuftig. På den andre siden sies det at luminositeten til en stjerne er proporsjonal med massen i potensen 3,5, og $16^{3,5} = 17\,000$, ikke $70\,000$, som er det oppgitte forholdet mellom luminositetene. I følge denne luminositetsformelen har vi altså funnet for liten masse ved hjelp av Keplers tredje lov. Jeg vet ikke hvorfor.
Det er verdt å merke seg at selv om disse stjernene er kjempestjerner, ligger de likevel på hovedserien. De er kjempestjerner rett og slett fordi de har så stor masse.

2e) Hva kommer til å skje med de to stjernene når de brenner ut? Begrunn svaret.
(Den som ikke har et svar, kan likevel forklare hvordan svaret burde begrunnes).

Siden de har masser mellom 8 og 25 solmasser, vil de ventelig eksplodere som supernovaer og ende opp som nøytronstjerner i bane rundt hverandre.
Usikkerhetsmomentet er det faktum at dette er et tett dobbeltstjernesystem. Sannsynligvis vil den ene stjernen være først ute med å svulme opp til en kjempestjerne. Hva som da kommer til å skje, vet ikke jeg, og kanskje ingen andre heller? Kanskje vil det bare overføres masse til den andre, og den første vil eksplodere som supernova og bli en nøytronstjerne, eller den vil bli en hvit dverg dersom den mister nok masse.
Hvis den eksploderer som supernova, kan det tenkes at eksplosjonen gir den fart nok til å bryte ut av partnerskapet. I så fall blir den andre stjernen etterlatt alene, den vil i sin tur bli en supernova og ende som en nøytronstjerne, eller kanskje som et svart hull dersom den har fått så mye masse at den har mer enn 25 solmasser.
Enda en mulighet er at de to stjernene på ett eller annet tidspunkt smelter sammen til en, før de blir supernovaer, det kan for eksempel skje når den første blir til kjempestjerne. Sammensmeltingen vil i alle fall bli en dramatisk begivenhet, og resultatet blir kanskje mest sannsynlig et svart hull.

3a) Gravitasjonskraften mellom to masser er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden mellom dem. Hvorfor er tidevannskraften, f.eks. fra Månen her på Jorda, omvendt proporsjonal med tredje potens av avstanden?

Tidevannskraften er *forskjellen* mellom gravitasjonskreftene i to punkter. Når avstanden mellom de to punktene er liten, sammenlignet med avstanden r til kilden for gravitasjonskraften, så er forskjellen, i følge en første ordens rekkeutvikling, lik den deriverte av gravitasjonskraften i retningen mellom punktene, multiplisert med avstanden mellom punktene. Derivasjonen forandrer avhengigheten av avstanden r fra $1/r^2$ til $1/r^3$.
Mer detaljert svar forlanges ikke. Men for å gi svaret mer substans, kan vi gjøre et lite regnestykke. For å beregne tidevannskraften fra Månen her på Jorda, kan vi plasere Månen med sitt sentrum i origo og Jorda med sitt sentrum i et vilkårlig punkt $\vec{r}$. Tidevannskraften fra Månen på en liten masse m i et punkt $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ er da, i følge den første ordens rekkeutviklingen,

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{K} &= ((\Delta\vec{r})\cdot\nabla)\left[-\frac{GM_M m}{r^3}\vec{r}\right] \\
&= -GM_M m\left[\left(((\Delta\vec{r})\cdot\nabla)\,\frac{1}{r^3}\right)\vec{r} + \frac{1}{r^3}\,(((\Delta\vec{r})\cdot\nabla)\,\vec{r})\right] \\
&= -GM_M m\left[\left(\frac{-3(\Delta\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^5}\right)\vec{r} + \frac{1}{r^3}\,(\Delta\vec{r})\right]
\end{aligned}$$

For en gitt avstand $\Delta\vec{r}$ ser vi at $\Delta\vec{K}$ avtar med avstanden r som $1/r^3$.

3b) Figuren viser flo og fjære i Trondheimsfjorden over en periode på ti uker. I denne tiden var det fem ganger springflo (maksimal forskjell mellom flo og fjære) og fem ganger nippflo (minimal forskjell mellom flo og fjære). Vi får springflo og nippflo fordi både Månen og Sola bidrar til å lage tidevann. Månen har størst virkning på tidevannet, det vet vi fordi tiden mellom to høyvann er 12 timer og 25 minutter. Hvor lang tid ville det være mellom to høyvann dersom Sola hadde større virkning enn Månen? Hvordan er månefasene ved springflo og ved nippflo?

Tidevannskraften fra Månen løfter vannet sterkest på vår side av jordkloden når Månen passerer vår lengdegrad og når den passerer lengdegraden på motsatt side av Jorda, 180° fra oss. Det skjer med et tidsintervall på 12 timer og 25 minutter imellom. Tiden er litt mer enn 12 timer, fordi Månen går i bane rundt Jorda i samme retning som jordrotasjonen.
Tidevannskraften fra Sola løfter også vannet sterkest på vår side av jordkloden når Sola passerer vår lengdegrad, det skjer ved middag (pr. definisjon), og når Sola passerer på motsatt side av Jorda, det skjer ved midnatt. Hvis Sola styrte tidevannet, mer enn Månen, ville tiden mellom to høyvann være nøyaktig 12 timer, det ville følgelig alltid være høyvann til samme tid på dagen. Det ville ikke nødvendigvis bli høyvann ved middag og midnatt, fordi i et slikt svingesystem er det en tidsforsinkelse mellom maksimal kraft og maksimalt utslag. Den forsinkelsen avhenger sterkt av lokale forhold.
Det er springflo når Månen og Sola står i samme retning på himmelen, da er det nymåne, og når de står i motsatt retning, da er det fullmåne.
Det er nippflo når Månen og Sola står 90° i forhold til hverandre på himmelen, da er det halvmåne, enten økende (ny) eller avtagende (ne).

3c) Bruk figuren til å beregne massen til Månen, gitt at massen til Sola er $1{,}989\times10^{30}$ kg, og gitt avstandene (dvs. middelavstandene) til Månen, 384 000 km, og til Sola, $1{,}496\times10^{8}$ km.
Vurder usikkerheten i svaret

Tidevannseffektene fra Månen og Sola er proporsjonale med massene og omvendt proporsjonale med avstandene i tredje potens, altså proporsjonale med faktorene

$$T_M = \frac{M_M}{d_M^3}\,, \qquad T_S = \frac{M_S}{d_S^3}\,.$$

der M betyr masse og d betyr avstand, mens indeksene M og S står for henholdsvis Månen og Sola.

Tidevannet er proporsjonalt med $T_M + T_S$ ved springflo og med $T_M - T_S$ ved nippflo. Forholdet mellom nippflo og springflo er et tall mellom 0 og 1,

$$\epsilon = \frac{T_M - T_S}{T_M + T_S} \; .$$

Omvendt er

$$\frac{T_S}{T_M} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \; .$$

Når vi kjenner dette forholdstallet, kan vi beregne månemassen som

$$\begin{aligned} M_M &= M_S \, \frac{M_M}{M_S} = M_S \, \frac{d_M^3 \, T_M}{d_S^3 \, T_S} = M_S \, \frac{d_M^3}{d_S^3} \, \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \\ &= 1{,}989 \times 10^{30} \text{ kg} \, \frac{(3{,}84 \times 10^5 \text{ km})^3}{(1{,}496 \times 10^8 \text{ km})^3} \, \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = 3{,}364 \times 10^{22} \text{ kg} \, \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \; . \end{aligned}$$

Av figuren leser vi ut at forskjellen mellom flo og fjære ved springflo noen ganger er 300 cm $(300-0)$, og andre ganger 270 cm $(280-10)$, la oss ta 285 cm som en middelverdi. Variasjonen kan kanskje forklares med at avstanden til Månen varierer. Forskjellen mellom flo og fjære ved nippflo er mer variabel, fra 70 cm $(170-100)$ og opp til 150 cm $(220-70)$, la oss ta 110 cm som en middelverdi. Setter vi

$$\epsilon = \frac{110 \text{ cm}}{285 \text{ cm}} = 0{,}386 \; ,$$

finner vi månemassen

$$M_M = 3{,}364 \times 10^{22} \text{ kg} \, \frac{1{,}386}{0{,}614} = 7{,}59 \times 10^{22} \text{ kg} \; .$$

For å vurdere usikkerheten kan vi kanskje anslå ekstreme verdier som vi er villige til å godta. Den absolutt maksimale verdien for ϵ anslår vi, i følge figuren, til

$$\epsilon = \frac{130 \text{ cm}}{270 \text{ cm}} = 0{,}481 \; ,$$

som gir

$$M_M = 9{,}62 \times 10^{22} \text{ kg} \; .$$

Den absolutt minimale verdien for ϵ anslår vi til

$$\epsilon = \frac{70 \text{ cm}}{300 \text{ cm}} = 0{,}233 \; ,$$

som gir

$$M_M = 5{,}41 \times 10^{22} \text{ kg} \; .$$

Hvis vi anslår standardavviket til for eksempel halvparten av maksimalavviket, så blir konklusjonen at

$$M_M = (7{,}6 \pm 1{,}1) \times 10^{22} \text{ kg} \; .$$

Siden fasiten er

$$M_M = 7{,}349 \times 10^{22} \text{ kg} \; ,$$

kan noe tyde på at vi overvurderer usikkerheten. (Beregningen gjengitt her, som gir 3% avvik fra fasitsvaret, kan kanskje se ut som juks! Men den ble gjort på ærlig og redelig vis uten at jeg så på fasiten først.)